Національний авіаційний університет

П'яних Б.Е., Азнакаєв Е.Г., Вишнівський О.В.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ ТА ПАРАМЕТРИЧНИХ КІЛ

КИЇВ 2011

ЗМІСТ

ВСТУП

В1. Класифікація електричних кіл

Електричне коло з вхідним впливом $x(t)$ і реакцією $y(t)$ представлене на рис. В1.

Рис. В1

Зв’язок між реакцією і впливом визначається диференційним рівнянням

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x \quad \text{(B1)}$$

Тут коефіцієнти a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_m залежать від параметрів *R*, *L*, *C* кола.

В залежності від коефіцієнтів a, b розрізняють кола:

1. Лінійні кола.

Параметри a, b не залежать ні від електричного режиму кола ні від часу.

2. Нелінійні кола.

Хоча б один з параметрів a, b залежить від електричного режиму кола, але не залежить від часу.

3. Параметричні кола.

Хоча б один з параметрів a, b залежить від часу, але не залежить від електричного режиму.

4. Нелінійні параметричні кола.

Хоча б один з параметрів a, b залежить від електричного режиму і від часу.

В2. Класифікація режимів в електричних колах.

Загальноприйнята класифікація режимів в лінійних колах застосовується і до нелінійних кіл. Але для параметричних і нелінійних параметричних кіл необхідні деякі уточнення.

Відомий усталений (стаціонарний) і перехідний (нестаціонарний) режими. Ця класифікація застосовується для лінійних, нелінійних і тих параметричних кіл, параметри елементів яких змінюються по періодичним законам (від $t \to -\infty$ до $t \to +\infty$). Якщо ж в параметричному колі має місце перехід від одного закону зміни параметра до іншого, то виникає додатковий перехідний процес. Отже в таких колах необхідно розрізнювати перехідні процеси, що виникають при зміні параметра по іншому закону.

В3. Застосування нелінійних та параметричних кіл.

1. Нелінійні кола:

- перетворення змінного струму у постійний – випрямлення;
- перетворення постійного струму у змінний – генерування коливань;
- зміна амплітуди, частоти або фази високочастотного коливання по закону керуючого сигналу – модуляція;
- виділення корисного сигналу з модульованих коливань – детектування;
- перетворення (множення та ділення) частоти;
- стабілізація напруги та струму;
- функціональні перетворення.

2. Параметричні кола:

- параметричне підсилювання коливань;
- параметричне генерування коливань;
- синхронне детектування амплітудно-модульованих сигналів;
- фазове детектування;
- параметричне множення і ділення частоти;
- несинхронні модуляція і демодуляція коливань;
- малошумливі підсилювачі низьких частот;
- підсилювачі у НВЧ діапазоні.

В4. Постановка задачі аналізу нелінійних і параметричних кіл.

Задача аналізу формулюється наступним чином. Відоме коло, тобто задані його параметри ($a, b, c, ...$) і схема з’єднань елементів. Відомий вхідний вплив $x(t)$. Необхідно знайти вихідний сигнал $y(t)$. Або навпаки задано вихідний сигнал $y(t)$ і треба знайти, яким повинен бути вхідний вплив $x(t)$.

Звичайно задача аналізу нелінійних та параметричних кіл більш складна, ніж лінійних кіл, але відомі методи аналізу, у тому числі за допомогою ЕОМ, дозволяють розв'язувати досить складні задачі поведінки нелінійних і параметричних кіл в різних режимах.

Глава 1
Нелінійні елементи та їх характеристики

1.1. Особливості нелінійних кіл.

В нелінійних колах опір, індуктивність чи ємність принаймні однієї з ділянок залежить від значення чи напряму струмів або напруг цієї ділянки. Тобто вольт-амперна характеристика опору $i = f(u)$, кулон-вольтна характеристика ємності $q = f(u)$ чи вебер-амперна характеристика індуктивності $\psi = f(i)$ принципово нелінійні. Звідси витікають особливості нелінійних кіл:

1. Не виконується принцип накладання.

Наприклад, для нелінійної залежності

$$y = ax^2 \tag{1.1}$$

Якщо на вході елемента діє складний сигнал $x = x_1 + x_2$, то по принципу накладання

$$y = ax_1^2 + ax_2^2 \tag{1.2}$$

Дійсна реакція

$$y = a(x_1 + x_2)^2 = ax_1^2 + 2ax_1x_2 + ax_2^2 \tag{1.3}$$

відрізняється від (1.2) доданком $2ax_1x_2$.

2. При гармонічному вхідному впливі в усталеному режимі реакція нелінійного кола не є гармонічною функцією, а може бути

представлена спектром гармонічних складових, частоти яких відсутні у вхідному впливі.
3. Для нелінійних кіл принциповим є наявність статичних і динамічних параметрів. На рис. 1.1. показана різниця статичного і динамічного опорів нелінійного резистора.

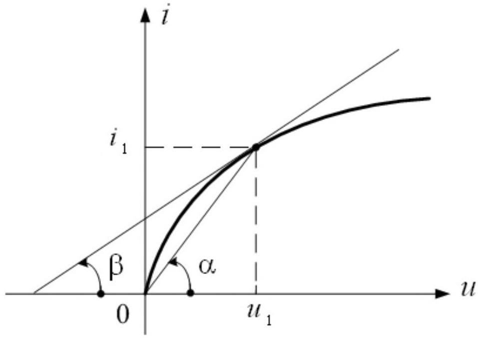


Рис. 1.1

Тут статичний опір

$$R_{\text{ст}} = \frac{u_1}{i_1} = \text{ctg}\alpha \tag{1.4}$$

Динамічний опір $kjbkb$

$$R_{\text{дин}} = \frac{du}{di} = \text{ctg}\beta \tag{1.5}$$

Статистичний опір завжди додатній. Динамічний опір може бути додатнім і від’ємним.
Обернена величина

$$S = \frac{di}{du} \tag{1.6}$$

зветься крутизною характеристики.

1.2. Характеристики елементів електричних кіл.

Всі елементи електричних кіл характеризуються своїми параметрами *R*, *L*, *C*. Для лінійних кіл ці параметри сталі, для нелінійних кіл – залежать від режиму, для параметричних кіл –

залежать від часу, для нелінійних параметричних кіл – залежать від режиму і часу. Для кожного з цих елементів характерний свій зв'язок між наслідком і причиною: для резистора – між струмом „*i*" і напругою „*u*", для конденсатора – між зарядом q і напругою „*u*", для котушки індуктивності – між потокозчепленням ψ і струмом „*i*" (табл. 1.1).

Табл. 1.1

Елементи	*Лінійні*	*Нелінійні*	*Параметричні*	*Нелінійні параметричні*
Резистори	R $u = Ri$ $i = Gu$	$R(i)$ $u = R(i)i$ $i = G(i)u$	$R(t)$ $u = R(t)i$ $i = G(t)u$	$R(i,t)$ $u = R(i,t)i$ $i = G(i,t)u$
Конденсатори	c $q = cu$ $i = c\dfrac{du}{dt}$	$c(u)$ $q = c(u)u$ $i = c(u)\dfrac{du}{dt} + u\dfrac{dc(u)}{dt}$	$c(t)$ $q = c(t)u$ $i = c(t)\dfrac{du}{dt} + u\dfrac{dc(t)}{dt}$	$c(u,t)$ $q = c(u,t)u$ $i = c(u,t)\dfrac{du}{dt} + u\dfrac{dc(u,t)}{dt}$
Котушки	L $\Psi = Li$ $u = L\dfrac{di}{dt}$	$L(i)$ $\Psi = L(i)i$ $u = L(i)\dfrac{di}{dt} + L\dfrac{dL(i)}{dt}$	$L(t)$ $\Psi = L(t)i$ $u = L(t)\dfrac{di}{dt} + L\dfrac{dL(t)}{dt}$	$L(i,t)$ $\Psi = L(i,t)i$ $u = L(i,t)\dfrac{di}{dt} + L\dfrac{dL(i,t)}{dt}$

Тут струм вимірюється в амперах, напруга – у вольтах, ємність – у фарадах, індуктивність – у генрі, заряд – у кулонах (ампер-секундах), потокозчеплення – у веберах (вольт-секундах).

Важливою ознакою нелінійних елементів є властивість інерційності. Розрізнюють інерційні (L, C) і безінерційні (R) елементи. В безінерційних елементах виникнення напруги миттєво викликає стум. В інерційних елементах при виникненні напруги, наприклад на індуктивності *L*, струм з'являється з запізненням у часі, або при виникненні струму, наприклад в ємності *C*, напруга з'являється з запізненням у часі.

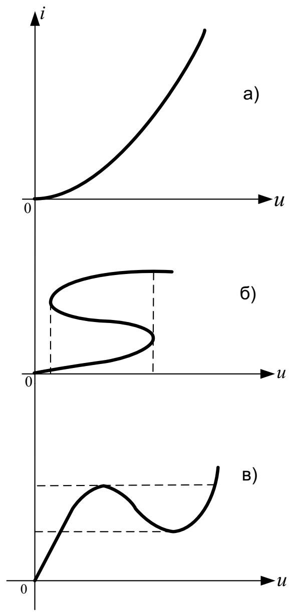


Рис. 1.2

Повне уявлення про нелінійний елемент дає характеристика, що показує залежність між електричними величинами. Для резистора це залежність між струмом і напругою (вольт-амперна характеристика) $u = f(i)$. Для котушки індуктивності це залежність між потокозчепленням і струмом (вебер-амперна характеристика) $\psi = f(i)$. Для конденсатора це залежність між зарядом і напругою (кулон-вольтна характеристика) $q = f(u)$.

Ще одною ознакою характеристик нелінійних елементів є їх однозначність. Якщо одному значенню аргументу відповідає тільки одне значення функції, то характеристика називається однозначною, наприклад, характеристика напівпровідникового діода (рис 1.2, а). Двозначними (багатозначними) називаються характеристики, у яких одному значенню аргументу відповідають два (або більше) значень функції, або двом (або більше) значенням аргументу відповідає одне значення функції. Наприклад, *S*-подібна характеристика газорозрядної лампи (рис. 1.2, б) чи *N*-подібна характеристика тунельного діода (рис. 1.2, в).

1.3.Способи опису характеристик нелінійних елементів.

Розрізняють наступні способи опису характеристик нелінійних елементів:

1. Табличний опис.

При цьому залежність (наприклад $i = f\left(u\right)$) знімають експериментально і подають у вигляді таблиці (табл. 1.2).

Табл. 1.2

U, В	u_1	u_2	u_3	. . .	u_N
I, мА	i_1	i_2	i_3	. . .	i_N

Табличний метод зручно використовувати при дослідженні нелінійних кіл за допомогою ЕОМ. Інформація про вольт-амперну характеристику записується в пам’яті ЕОМ у вигляді двовимірного масиву.

2. Графічний метод.

Перевагою графічного методу є можливість наочного визначення струмів і напруг у схемі при заданих параметрах (рис. 1.3). Але графічний метод не дозволяє визначити оптимальні значення параметрів схеми.

3. Аналітичний метод.

Цей метод дозволяє описати експериментальну вольт-амперну характеристику певною функціональною залежністю, тобто встановити аналітичні залежності між зміною параметрів схеми і значеннями її струмів і напруг, а також визначити оптимальні значення параметрів.

1.4. Апроксимація характеристик нелінійних елементів

1.4.1. Задача апроксимації

Процес складання аналітичного виразу графічно заданої нелінійної характеристик називається апроксимацією.

При апроксимації необхідно задовольнити наступні вимоги:

1. Виявлення властивостей схеми, що являють інтерес у даному випадку.
2. Простота апроксимуючої функції, що дозволяє подальшу математичну обробку.
3. Достатня точність.

1.4.2. Апроксимуючі функції

<u>Кусково-лінійна апроксимація</u>

Кусково-лінійні апроксимація полягає в заміні реальної характеристики відрізками прямих (рис. 1.3,а).

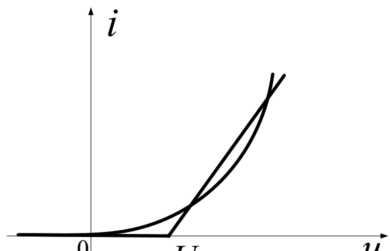


Рис. 1.3

Апроксимація визначається двома параметрами: значенням початку похилої прямої $U_п$ і її крутизни S, що має розмірність провідності. Аналітично апроксимуюча функція записується виразом

$$i(u)=\begin{cases}0 \text{ при } u \le U_{\text{п}} \\ s(u-U_{\text{п}}) \text{ при } u > U_{\text{п}}\end{cases} \tag{1.7}$$

Для більш складного випадку нелінійної характеристики можна виділити три ділянки апроксимації (рис.1.4)

$$i(u)=\begin{cases}0 \text{ при } u \le U_{\text{п}1} \\ S_1(u-U_{\text{п}1}) \text{ при } \mathrm{U}_{\text{п}1} < u \le U_{\text{п}2} \\ S_2(u-U_{\text{п}2}) \text{ при } u > U_{\text{п}2}\end{cases} \tag{1.8}$$

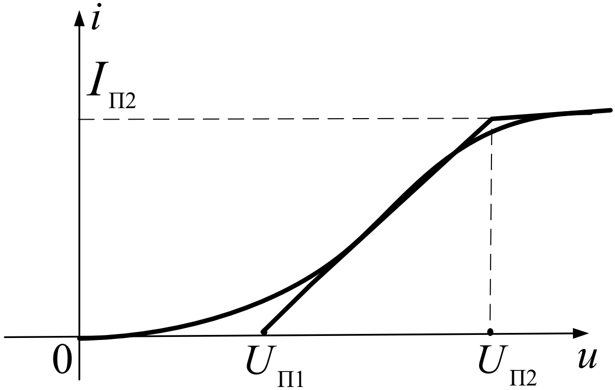


Рис. 1.4

Тут $U_{\text{П}1}$, $U_{\text{П}2}$ - напруги початків ділянок, на які розбивається апроксимуюча функція; S_1, S_2 - значення крутизни відповідних похилих прямих.

Кусково-лінійна апроксимація використовується для опису нелінійних характеристик елементів, які перебувають під впливом сигналів великого рівня.

Степенева апроксимація

Розглянемо нелінійну характеристику навколо робочої точки *A* (рис. 1.5).

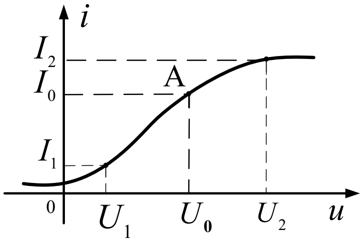


Рис. 1.5

Розкладемо характеристику в ряд Тейлора

$$i(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (u - U_0)^n = a_0 + a_1 (u - U_0) + a_2 (u - U_0)^2 + \ldots \qquad (1.9)$$

Коефіцієнти a_n визначається виразом

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n i(u)}{du^n} \right|_{u=U_0}, n = 0,1,2,\ldots \qquad (1.10)$$

З нескінченного числа членів ряду Тейлора практично враховується тільки деяке їх число. Апроксимація тим точніша, чим більше число членів ряду ураховано.

Апроксимація нелінійної характеристики рядом Тейлора належить до локальних методів, тобто ряд (1.9) добре відображає поведінку функції $i(u)$ навколо робочої точки A. Степенева апроксимація застосовується для опису нелінійних характеристик елементів, які перебувають під впливом сигналів малого рівня.

Якщо нелінійна характеристика задана аналітично по (1.9), то коефіцієнти ряду a_n визначаються за виразом (1.10). На практиці характеристика задається або у табличному вигляді або графічно. Так при графічній залежності по рис. 1.5 обирається робочий діапазон у межах $u_1 - u_3$ навколо робочої точки A з координатами (I_1, U_1), (I_2, U_2). Якщо цей діапазон невеликий і зміна характеристики незначна, то для апроксимації обирається поліном другого порядку

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 \qquad (1.11)$$

Підставляючи в (1.11) координати точок по рис. 1.5, одержуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2

$$\begin{cases} i_1 = a_0 + a_1(u_1 - U_0) + a_2(u_1 - U_0)^2 \\ i_2 = I_0 = a_0 \\ i_3 = a_0 + a_1(u_3 - U_0) + a_2(u_3 - U_0)^2 \end{cases} \qquad (1.12)$$

Розв’язок системи дає значення коефіцієнтів

$$a_0 = I_0(\text{мА}), a_1\left(\frac{\text{мА}}{\text{В}}\right), a_2\left(\frac{\text{мА}}{\text{В}^2}\right)$$

<u>Показникова апроксимація</u>

Показникова апроксимація експоненціальним поліномом добре передає початкову ділянку нелінійної характеристики, на якій крутизна зростає. Так для апроксимації вольт-амперної характеристики напівпровідникового діода (*p-n* переходу) використовується показникова функція

$$i(u) = b(\mathrm{e}^{\alpha u} - 1) \qquad (1.13)$$

Визначення параметрів „*b*” і α є доволі складним. Часто їх добирають експериментально, виходячи з фізичних уявлень про роботу пристрою. Так для напівпровідникового діода параметр „*b*” дорівнює кільком пікоамперам ($10^{-12}A$), а параметр

$$\alpha \approx 10...50\left(\frac{1}{B}\right).$$

Показникова апроксимація по (1.13) використовується при струмах не більше кількох міліампер.

Показникова апроксимація відноситься до апроксимації трансцендентними функціями, до яких відносяться також гіперболічні, тригонометричні, обернені тригонометричні та інші функції.

Крім розглянутих, відомі також інші методи апроксимації, наприклад, за допомогою класичних поліномів

Чебишева, Ерміта, Лаггера, дробово-раціональних функцій, сплайн-функцій.

Приклад 1.1.

Вольтамперна характеристика вакуумного діода наведена на рис. 1.6.

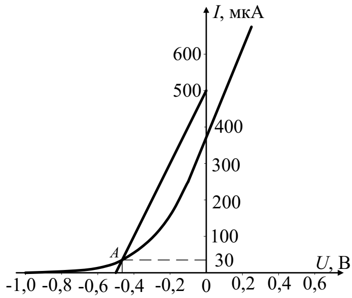


Рис. 1.6

Апроксимувати цю характеристику в околі точки *U*= -1В степеневим рядом Тейлора на двохділянках:

1. $-1 \le U \le -0{,}4$ В; 2. $-1 \le U \le 0$ В.

Розв’язок.

На ділянці $-1 \le U \le -0{,}4$ В ряд Тейлора записується у вигляді

$$I = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2$$

Обираємо на цій ділянці три характерні точки

$$U_0 = -1\text{ В},\ I_0 = a_0 = 0$$

$$U_1 = -0{,}7\text{ В},\ I_1 = 10\text{ мкА}$$

$$U_2 = -0{,}4\text{ В},\ I_2 = 45\text{ мкА}$$

Складаємо систему рівнянь

$$I_1 = a_0 + a_1(U_1 - U_0) + a_2(U_1 - U_0)^2 = a_0 + a_1(-0,7+1) + a_2(-0,7+1) +$$
$$+a_2(-0,7+1)^2 = 0,3a^1 + 0,09a^2 = 10$$
$$I_2 = a_0 + a_1(U_2 - U_0) + a_2(U_2 - U_0)^2 = a_1(-0,4+1) + a_2(-0,4+1)^2 =$$
$$= 0,6a_1 + 0,36a_2 = 45$$

Розв'язуючи систему рівнянь, одержуємо коефіцієнти ряду Тейлора: a_0=0, a_1=-8,35мкА/В, a_2=138,5 мкА/В

Отже апроксимуючий ряд Тейлора для ділянки -1≤U≤ -0,4 В:

$$I = -8,35(U+1) + 138,5(U+1)$$

На ділянці -1≤U≤ 0 В вибираємо для апроксимації параболу четвертого степеня

$$I = a_4(U - U_0)^4$$

Апроксимація рядом Тейлора четвертого степеня приводить до доволі складного виразу, який майже не має переваг точності апроксимації перед параболою четвертого степеня. Знайдемо коефіцієнт a_4. При U=0 одержуємо

$$I = a_4(U - U_0)^4 = a_4(0+1)^4 = 370 \text{ мкА}$$

Отже апроксимуюча функція для ділянки -1≤U≤ 0 В

$$I = (U+1)^4$$

Приклад 1.2.

Вакуумний діод по задачі 1.1, ввімкнений у коло з активним опором R=1 кОм і джерелом напруги з ЕРС E=0,5 В (рис. 1.7).

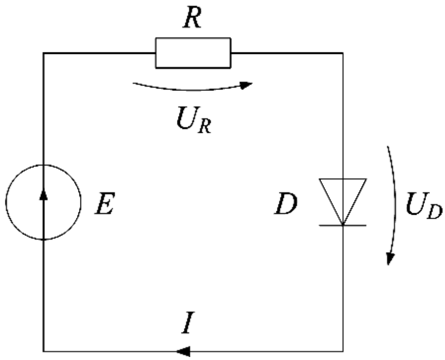


Рис. 1.7

Знайти струм у колі і напруги на елементах, якщо ВАХ апроксимована параболою другого степеня

$$I = 125(U_0 + 1)^2 .$$

Розв'язок.

По Закону Кіргофа для напруг складаємо рівняння електричної рівноваги

$$-E + IR + U_0 = 0$$

Друге рівняння – це ВАХ діода

$$I = 125(U_0 + 1)^2$$

Розв'язок системи рівнянь відносно напруги $U_Д$ дає квадратне рівняння

$$U_Д^2 + 6U_Д - 3 = 0$$

Його корені

$$U_{Д1,2} = -3 \pm \sqrt{9+3} = -3 \pm 3,47$$

Очевидно, дійсним є корінь $U_Д$=-3+3,47=0,47 В

Другий корінь ($U_Д = -6,47$ В) не дійсний, тому що вже при $U_0 = -1$ струм у колі дорівнює нулю

Струм у колі

$$I = \frac{E - U_Д}{R} = \frac{0,5 - 0,47}{1 \cdot 10^3} = 30 \text{ мкА}$$

Напруга на опорі R

$$U_R = IR = 30 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^3 = 0,03 \text{ В}$$

Задачу можна розв’язати графічно.

Побудуємо залежність $I(U_{\text{Д}})$. Це пряма лінія. При I=0 $U_{\text{Д}}$=E=0,5В, при $U_{\text{Д}}$=0 $I = \dfrac{E}{R} = \dfrac{0,5}{1 \cdot 10^3} = 500 \text{ мкА}$. Пряма лінія проходить через ці точки на рис. 1.7. Точка перетину А прямої з графіком ВАХ діода дає значення струму I_0=30 мкА і напруги на діоді $U_{\text{Д}}$=-0,47 В, а також напругу на опорі

$$U_R = E - U_{\text{Д}} = 0,5 - 0,47 = 0,03 \text{ В}$$

1.6. Методичні вказівки

На початку вивчення курсу „Нелінійні та параметричні кола” треба звернути увагу на класифікацію цих кіл: нелінійні, параметричні та нелінійні параметричні кола. Взагалі всі реальні кола є нелінійними. При розрахунках до лінійних електричних кіл відносяться такі, в яких при певних умовах нелінійністю можна знехтувати.

Параметричні кола мають особливості стосовно характерних процесів, які можуть виникати в них не тільки при зміні зовнішніх впливів, а й при зміні параметрів кола. Такі режими можуть існувати в колі одночасно.

Корисно зважити, що застосування нелінійних кіл набагато більш поширене, ніж лінійних, тому що багато задач перетворення сигналів не можуть бути вирішені лінійними колами принципово.

Головною особливістю нелінійних кіл е те, що при гармонічному впливі в усталеному режимі реакція кола не є гармонічною функцією, а являє собою спектр гармонічних складових, частоти яких відсутні у вхідному впливі.

Важливим розділом глави 1 є апроксимація характеристик нелінійних елементів, яка використовується у багатьох наступних розділах курсу. Тому питання апроксимації треба засвоїти досконало, що полегшить подальшу роботу по вивченню курсу.

Задачі.

1.1. Характеристика нелінійного елемента (рис. 1.8) апроксимується рядом Тейлора другого порядку $i(u) = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2$ на ділянці $0.7 \le U \le 1.3$ В.

Знайти коефіцієнти a_0, a_1, a_2

Відповідь: a_0 =10 мА, a_1 =26,67 мА/В, a_2 =0

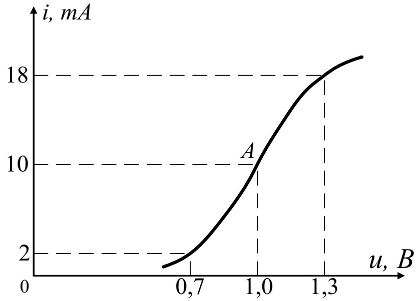


Рис. 1.8

1.2. Експериментально одержана вхідна характеристика $i_5 = f(U_{\text{БЕ}})$ транзистора КТ 301 задана графіком (рис. 1.9).

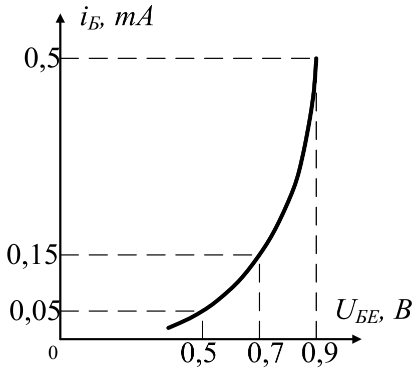


Рис. 1.9

Знайти коефіцієнти a_0, a_1, a_2, що визначають апроксимацію виду $i_\text{Е} = a_0 + a_1(U_\text{БЕ} - U_0) + a_2(U_\text{БЕ} - U_0)^2$ в околі робочої точки U_0=0,7 В

Відповідь: a_0=0,15 мА, a_1=1,125 мА/В, a_2=3,125 мА/ В^2

1.3. У колі, схема якого зображена на рис. 1.10,а ввімкнений нелінійний елемент НЕ з ВАХ виду (рис. 1.10,б)

$$I = \begin{cases} 0 \text{ при } U<0 \\ 320\ U^2 \text{ мкА при } U \geq 0 \end{cases}$$

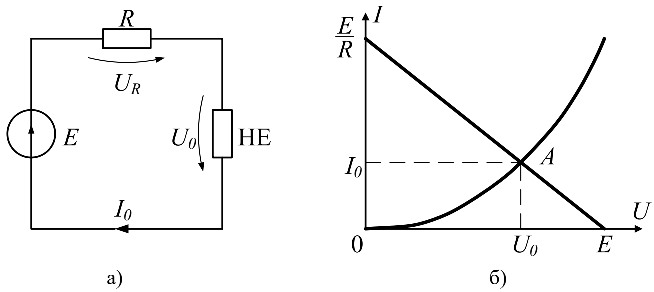


Рис. 1.10

E = 2,7 В, R =5,1 кОм. Знайти напругу U_0 на нелінійному елементі.

Відповідь: U_0=1,01585 В.

1.4. Знайти крутизну $S(U_0)$ для напівпровідникового діода з ВАХ виду

$$I = \begin{cases} 0 \text{ при } U<0 \\ I_S(\mathrm{e}^{\frac{U}{U_\text{Т}}} \text{-1}) \text{ при } U \geq 0, \end{cases}$$

де I_S-зворотній струм насичення, який складає долі наноампера для малопотужних діодів. Прийняти I_S=0,5 мкА;

U_T -тепловий потенціал *p-n*-переходу, що дорівнює 26 мВ при кімнатній температурі 300 К. Прийняти U_T =0,3 В

Відповідь: $S(U_0)$ =1,97 мА/В

Література

Питання для самоперевірки

1. Наведіть класифікацію електричних кіл.
2. Назвіть особливості режимів в параметричних колах.
3. Дайте приклади застосування нелінійних кіл.
4. Дайте приклади застосування параметричних кіл.
5. Поясніть особливості нелінійних кіл.
6. Які характеристики елементів електричних кіл Вам відомі?
7. Які способи опису характеристик нелінійних елементів Ви знаєте?
8. Поясніть суть кусково-лінійної апроксимації.
9. Поясніть суть степеневої апроксимації.
10. Поясніть суть показникової апроксимації.

Глава 2
Спектральний склад струму в безінерційному нелінійному елементі при гармонічному впливі

2.1. Основні співвідношення

Розглянемо послідовне з'єднання джерела гармонічної напруги

$$u_{\text{с}}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad (2.1)$$

і джерела постійної напруги U_0 з нелінійним елементом НЕ (рис. 2.1).

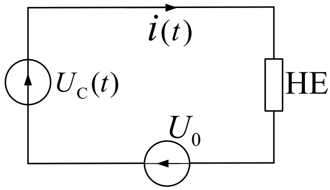


Рис. 2.1

Вольтамперна характеристика $i(u)$ нелінійного елемента наведена на рис. 2.2.

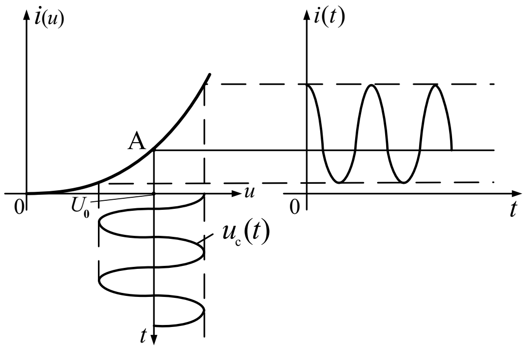


Рис. 2.2

Видно, що при гармонічному сигналі $u_{\text{с}}(t)$ форма струму $i(t)$ - негармонічна функція, тому що диференційна крутизна

$$S_{\text{диф}} = \frac{di(u)}{du} \qquad (2.2)$$

різна на різних ділянках вольтамперної характеристики.
Робоча точка *A* визначається постійною напругою U_0.
Напруга на нелінійному елементі

$$u_{\text{НЕ}}(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi) \tag{2.3}$$

Струм у нелінійному елементі

$$\begin{aligned} i_{\text{НЕ}}(U_0, u_{\text{НЕ}}) &= i_{\text{НЕ}}\left[U_0, U_m \cos(\omega t + \varphi)\right] = \\ &= i_{\text{НЕ}}(U_0, U_m \cos\xi) = i_{\text{НЕ}}(\xi) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Струм $i_{\text{НЕ}}(\xi)$ є періодичною функцією аргументу ξ з періодом 2π і може бути представлений рядом Фур’є на інтервалі $[-\pi, \pi]$

$$i(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\xi} \tag{2.5}$$

Коефіцієнти ряду Фурьє

$$\dot{c}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\xi) \mathrm{e}^{-jn\xi} d\xi \tag{2.6}$$

Функція $i(\xi)$ парна (симетрична відносно вісі ординат), тому що ряд Фур’є включає тільки косинусоїдальні складові

$$i(\xi) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos n\xi \tag{2.7}$$

Амплітуди гармонік струму

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} i(\xi)d\xi \qquad (2.8)$$

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} i(\xi)\cos n\xi d\xi, n = 1, 2, ..$$

З (2.4) видно, що

$$\xi = \omega t + \varphi \qquad (2.9)$$

Тому

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos\left(n\omega t + n\varphi\right) \qquad (2.10)$$

Тобто спектр струму у нелінійному безінерційному елементі при гармонічному впливі включає постійну складову I_0 і нескінченну послідовність гармонік з амплітудами I_n, які залежать як від параметрів вхідної напруги U_0, U_m, так і від типу функції апроксимації. Розглянемо види апроксимації.

2.2. Кусково-лінійна апроксимація

Розглянемо вольтамперну характеристику $i(u)$ нелінійного елемента, яка апроксимована кусково-лінійною залежністю (рис. 2.3).

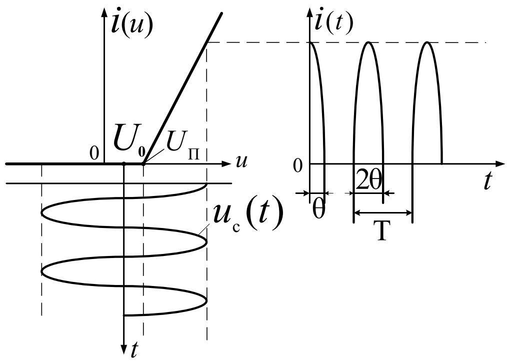


Рис. 2.3

Для неї

$$i(u)=\begin{cases}0, u\le U_{\text{п}}\\ s(u-U_{П}), u\ge U_{\text{п}}\end{cases} \qquad (2.11)$$

Напруга на нелінійному елементі

$$u_{\text{НЕ}}(t)=U_0+U_m\cos\omega t \qquad (2.12)$$

Струм у нелінійному елементі $i(t)$ має форму косинусоїдних імпульсів з відсічкою (рис. 2.3). Кут відсічки θ визначається із співвідношення

$$U_0+U_m\cos\theta=U_{\text{п}}$$

Зідси

$$\cos\theta=\frac{U_{\text{п}}-U_0}{U_m} \qquad (2.13)$$

Постійна складова I_0 і амплітуди гармонік визначають із виразів

$$I_0=SU_m\gamma_0(\theta) \qquad (2.14)$$

$$I_n=SU_m\gamma_{\text{n}}(\theta) \qquad (2.15)$$

де $\gamma_0(\theta)$, $\gamma_n(\theta)$ - функції Берга.

$$\gamma_0(\theta)=\frac{1}{\pi}(\sin\theta-\theta\cos\theta) \qquad (2.16)$$

$$\gamma_1(\theta)=\frac{1}{\pi}(\theta-\sin\theta\cos\theta) \qquad (2.17)$$

$$\gamma_n(\theta) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin n\theta\cos\theta - n\cos n\theta\sin\theta}{n(n^2-1)}, n = 2,3,.. \quad (2.18)$$

Функції Берга визначають по графікам чи таблицям.

2.3. Степенева апроксимація

Розглянемо апроксимацію вольтамперної характеристики нелінійного елемента навколо робочої точки рядом Тейлора

$$i(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(u - U_0\right)^n \quad (2.19)$$

Напруга на нелінійному елементі

$$u_{\text{НЕ}}(t) = U_0 + U_m\cos\omega t \quad (2.20)$$

Тоді по (2.19), (2.20) струм у нелінійному елементі

$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (U_m\cos\omega t)^n \quad (2.21)$$

Відомі співвідношення

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(3\cos x + \cos 3x\right)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(3 + 4\cos 2x + \cos 4x\right)$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}\left(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x\right)$$

....

Використовуючи ці співвідношення, можна записати з (2.21)

$$i(t)=\left(a_0+\frac{1}{2}a_2U_m^2+\frac{3}{8}a_4U_m^4+...\right)+$$
$$+\left(a_1U_m+\frac{3}{4}a_3U_m^3+\frac{5}{8}a_5U_m^5+...\right)\cos\omega t+$$
$$+\left(\frac{1}{2}a_2U_m^2+\frac{4}{8}a_4U_m^4+\frac{15}{32}a_6U_m^6+...\right)\cos 2\omega t+$$
$$+\left(\frac{1}{4}a_3U_m^3+\frac{5}{16}a_5U_m^5+\frac{21}{64}a_7U_m^7+...\right)\cos 3\omega t+... \qquad (2.22)$$

Звідси постійна складова I_0 і амплітуди гармонік струму нелінійного елемента

$$\begin{cases} I_0=a_0+\frac{1}{2}a_2U_m^2+\frac{3}{8}a_4U_m^4+... \\ I_1=a_1U_m+\frac{3}{4}a_3U_m^3+\frac{5}{8}a_5U_m^5+... \\ I_2=\frac{1}{2}a_2U_m^2+\frac{4}{8}a_4U_m^4+\frac{15}{32}a_6U_m^6+... \\ I_3=\frac{1}{4}a_3U_m^3+\frac{5}{16}a_5U_m^5+\frac{21}{64}a_7U_m^7+... \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (2.23)$$

З (2.23) видно, що постійна складова і амплітуди парних гармонік визначається коефіцієнтами ряду Тейлора з парними номерами, а непарних гармонік - коефіцієнтами з непарними номерами. Номер самої високої гармоніки співпадає з найвищим показником ступеня ряду.

Загальний вираз для n-ї гармоніки

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+n)!}{2^{2k+n} k!(k+n)!} a_{2k+n} U_m^{2k+n} \qquad (2.24)$$

2.4. Показникова апроксимація

Розглянемо апроксимацію вольтамперної характеристики нелінійного елемента у вигляді

$$i(u) = b(e^{\alpha u} - 1) \qquad (2.25)$$

Відома формула

$$e^{m\cos x} = I_0(m) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(m)\cos nx \qquad (2.26)$$

де $I_n(m)$ - модифікована функція Бесселя *n*-го порядку.

Якщо напруга на нелінійному елементі відповідає (2.20), то струм у нелінійному елементі по (2.26)

$$i(t) = b\left[e^{\alpha u_{HE}(t)} - 1\right] = b\left[e^{\alpha(U_0 + U_m\cos\omega t)} - 1\right] =$$

$$= b(e^{\alpha U_0} e^{\alpha U_\mathrm{m}\cos\omega t} - 1) =$$

$$= b\left\{e^{\alpha U_0}\left[I_0\alpha(U_m) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(\alpha U_m)\cos n\omega t\right] - 1\right\} =$$

$$= b\left[e^{\alpha \mathrm{U}_0} I_0(\alpha U_m) - 1\right] + 2be^{\alpha U_0}\sum_{n=1}^{\infty} I_n(\alpha U_m)\cos\omega t \qquad (2.27)$$

2.5. Метод трьох та п'яти ординат.

Метод трьох та п'яти ординат застосовують, в основному, при графічних розрахунках.

Розглянемо метод трьох ординат. Він дає можливість знайти наближені значення постійної складової I_0 і амплітуди перших двох гармонік I_1, I_2 струму нелінійного елемента. Характеристика нелінійного елемента задана графіком рис. 2.4,а.

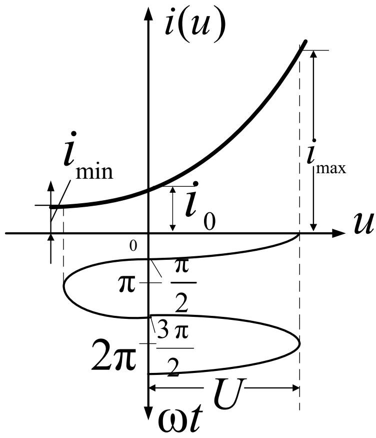


Рис. 2.4, а

Струм нелінійного елемента, як і на рис.2.2, є парною функцією і може бути записаний у формі:

$$i = I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t \tag{2.28}$$

Оберемо на графіку рис.2.4,а три ординати:

$$\begin{cases} i_{max} \text{ при } \omega t = 0,\ u = U; \\ i_0 \text{ при } \omega t = \dfrac{\pi}{2},\ u = 0; \\ i_{min} \text{ при } \omega t = \pi,\ u = -U. \end{cases} \tag{2.29}$$

Підставляючи значення (2.29) у (2.28), одержимо систему з трьох рівнянь

$$\begin{cases} i_{max} = I_0 + I_1 + I_2, \\ i_0 = I_0 - I_2, \\ i_{min} = I_0 - I_1 + I_2 \end{cases} \tag{2.30}$$

Розв’язок системи (2.30) дає значення трьох ординат

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{i_{max} + i_{min} + 2i_0}{4}, \\ I_1 = \dfrac{i_{max} - i_{min}}{2}, \\ I_2 = \dfrac{i_{max} + i_{min} - 2i_0}{4} \end{cases} \qquad (2.31)$$

Якщо необхідно визначити гармоніки більш високих порядків, то використовують метод п’яти ординат. При цьому струм нелінійного елемента представляється виразом

$$i = I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t + I_3 \cos 3\omega t + I_4 \cos 4\omega t$$

Відповідно графіку рис.2.4,б складається система рівнянь

$$\begin{cases} i_{max} = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \\ i_0 = I_0 - I_1 + I_4, \\ i_1 = I_0 + 0.5I_1 - 0.5I_2 - I_3 + 0.5I_4, \\ i_2 = I_0 - 0.5I_1 + 0.5I_2 + I_3 - 0.5I_4, \\ i_{min} = I_0 - I_1 + I_2 - I_3 + I_4 \end{cases}$$

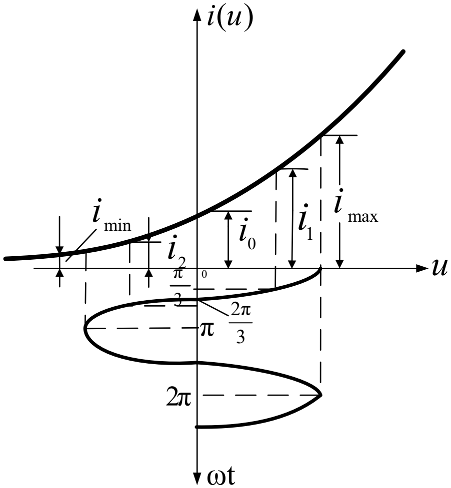


Рис. 2.4, б

Розв’язок системи дає

$$\begin{cases} I_0 = \frac{1}{6}\left[i_{max} + i_{min} + 2(i_1 + i_2)\right], \\ I_1 = \frac{1}{3}\left(i_{max} - i_{min} + i_1 - i_2\right), \\ I_2 = \frac{1}{4}\left(i_{max} + i_{min} - 2i_0\right), \\ I_3 = \frac{1}{6}\left[i_{max} - i_{min} - 2(i_1 - i_2)\right], \\ I_4 = \frac{1}{12}\left[(i_{max} + i_{min}) - 4(i_1 + i_2) + 6i_0\right] \end{cases}$$

Точність визначення амплітуд гармонік при методах трьох та п’яти ординат невисока і похибка зростає при зростанні амплітуди вхідної напруги.

Приклад 2.1.

Вакуумний діод по прикладу 1.1. знаходиться під напругою зміщення $U_0 = -1$В. На діод подається гармонічний сигнал $u(t) = U_m \cos \omega t$. Знайти спектр амплітут струму діода при амплітуді сигналу U_m =0,6 В; U_m =1 В. Проаналізувати спектр в залежності від величини зміщення.

Розв’язок.

При амплітуді U_m =0,6 В вхідний сигнал

$$u(t) = 0,6\cos \omega t$$

Для знаходження спектра струму доцільно застосувати апроксимацію квадратичною парабулою

$$I = 125(U_Д + 1)^2,$$

тому що робочою ділянкою характеристики є ділянка від -1 В до -0,4 В.

Напруга на діоді

$$U_Д(t) = U_0 + u(t) = -1 + 0,6\cos \omega t$$

Підставимо $U_{Д}(t)$ у функцію апроксимації

$$i_{Д}(t) = 125\left[U_{Д}(t)+1\right]^2 = 125 \cdot 0,36\cos^2\omega t = 45\cos^2\omega t$$

Використовуючи формулу кратних дуг

$$\cos^2\omega t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t),$$

одержимо

$$i_{Д}(t) = 22,5 + 22,5\cos 2\omega t$$

Звідси видно, що струм діода складається з постійної компоненти $I_{Д0}$=22,5 мкА і другої гармоніки $I_{Д2} = 22,5\cos 2\omega t$

При амплітуді U_m =1 В вхідний сигнал

$$u(t) = 1\cos\omega t$$

Для знаходження спектра струму доцільно застосувати апроксимацію парабулою четвертого степеня

$$I = 370(U_{Д}+1)^4,$$

тому що робочою ділянкою характеристики є ділянка від -1В до 0.

Напруга на діоді

$$u_{Д}(t) = U_0 + u(t) = -1 + 1\cos 2\omega t$$

Підставимо $u_{Д}(t)$ у функцію апроксимації

$$i_{Д}(t) = 370[u_{Д}(t)+1]^4 = \cos^4\omega t = \frac{1}{4}(1+\cos 2\omega t)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(1+2\cos 2\omega t+\cos^2 2\omega t) = \frac{1}{4}(1+2\cos 2\omega t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\omega t) =$$

$$= 0,75 + 0,5\cos 2\omega t + 0,125\cos 4\omega t$$

Звідси видно, що струм діода складається з постійної компоненти $I_{Д0}$=0,75 мкА, другої $i_{Д2} = 0,5\cos 2\omega t$ і четвертої $i_{Д4} = 0,125\cos 4\omega t$ гармонік.

3. Проаналізуємо зміну спектру при зміні напруги зміщення.

Змінимо напругу зміщення до U_0=-1,4 В. Якщо вхідний сигнал $u(t) = 1\cos\omega t$, то напруга на діоді

$$u_{\text{Д}}(t) = -1,4 + 1\cos\omega t$$

Робоча ділянка характеристики є ділянкою від -1 В до -0,4 В тому доцільно використовувати квадратичну парабулу

$$I = 125(U_{\text{Д}} + 1)^2$$

Зважимо на те, що при $U_{\text{Д}} \le -1$ В струм діода відсутній.Тому вхідний сигнал з амплітудою 1В буде діяти відносно напруги зміщення U_0=-1,4 В тільки у межах від -1 В до -0,4 В, тобто діюча амплітуда вхідного сигналу складає 0,6 В. Тепер струм діода

$$i_{Д}(t) = 125(-0,4 + 0,6\cos\omega t)^2 =$$

$$= 125(0,16 - 0,48\cos\omega t + 0,36\cos^2\omega t =$$

$$= 125(0,16 - 0,48\cos\omega t + 0,18 + 0,18\cos 2\omega t) =$$

$$= 42,5 - 60\cos\omega t + 22,5\cos 2\omega t$$

Тобто зміна амплітуди сигнала і напруги зміщення (робочої точки характеристики) суттєвим чином впливають на спектральний склад струму нелінійного елемента.

Приклад 2.2.

Нелінійний елемент має кусково-лінійну апроксимацію ВАХ з параметрами $U_{\text{П}}$ =0,6 В, S=25 мА/В. До нелінійного елемента підключена напруга u=0.2+0.8cosωt (В). Знайти постійну складову I_0 та першу гармоніку I_1 струму.

Розв’язок

Струм у нелінійному елементі має форму косинусоїдних імпульсів з відсічкою. Кут відсічки

$$\theta = \arccos\frac{U_{\text{П}} - U_0}{U_m}$$

Тут U_0 =0,2 В, U_m =0,8 В. Тоді

$$\theta = \arccos\frac{0,6-0,2}{0,8} = 60^\circ$$

Постійна складова та перша гармоніка струму

$$I_0 = SU_m\gamma_0(\theta)$$

$$I_1 = SU_m\gamma_1(\theta)$$

Значення функцій Берга

$$\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi}(\sin\theta - \theta\cos\theta) = \frac{1}{\pi}(\sin 60^\circ - \frac{\pi}{3}\cos 60^\circ) = 0,109$$

$$\gamma_1(\theta) = \frac{1}{\pi}(\theta - \sin\theta\cos\theta) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{3} - \sin 60^\circ\cos 60^\circ) = 0,196$$

Тепер

$$I_0 = 25\cdot 0,8\cdot 0,109 = 2,18 \text{ мА}$$

$$I_1 = 25\cdot 0,8\cdot 0,196 = 3,92 \text{ мА}$$

2.6. Методичні вказівки.

При вивченні безінерційних кіл можна не зважати на кінцеву тривалість реальних сигналів, тому що перехідні процеси в таких колах не виникають.

Форми струму і напруги в нелінійних елементах різні, оскільки диференційна крутизна вольтамперної характеристики нелінійного елемента на різних ділянках різна.

Струм нелінійного елемента виявляється періодичною функцією аргументу і може бути розкладений в ряд Фур’є на гармонічні складові з різними амплітудами, частотами і фазами. Амплітуди гармонічних складових струму залежать як від параметрів вхідної напруги, так і від виду апроксимації вольтамперної характеристики.

З усіх методів визначення гармонічних складових ряду Фур’є самим точним є метод зі степеневою апроксимацією у невеликій області навколо робочої точки вольтамперної характеристики, а самим неточним – методи трьох та п’яти ординат, похибка яких зростає при рості амплітуди вхідної напруги. На це треба зважати при виборі типу апроксимації.

Задачі

2.1 Нелінійний елемент має ВАХ з кусково-лінійною апроксимацією

$$i(u)=\begin{cases}0 \text{ при } u\le U_{\text{П}}=0{,}6 \text{ В}\\ S(u-U_{\text{П}})=25(u-0{,}6)\ \dfrac{\text{мА}}{\text{В}} \text{ при } u\ge U_{\text{П}}=0{,}6 \text{ В}\end{cases}$$

Нелінійний елемент підключений до напруги

$$u(t)=0{,}2+0{,}8\cos\omega t$$

Знайти постійнускладову I_0 та першу гармоніку I_1 струму нелінійного елемента.

Відповідь: I_0=2,18 мА, I_1=3,92 мА.

2.2. Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента апроксимована рядом Тейлора. Коефіцієнти ряда $a_0=6$ мА, $a_1=15\ \dfrac{\text{мА}}{\text{В}}$, $a_2=3\ \dfrac{\text{мА}}{\text{В}^2}$, $a_3=2\ \dfrac{\text{мА}}{\text{В}^3}$, $a_1=1\ \dfrac{\text{мА}}{\text{В}^4}$. Решта коефіцієнтів дорівнюють нулю. Нелінійний елемент підключений до змінної гармонічної напруги з амплітудою U_m =1,5 В. Знайти постійну складову I_0 і амплітуди першої I_1, другої I_2, третьої I_3 та четвертої I_4 гармонік струму.

Відповідь: I_0=11,27 мА, I_1=27,56 мА, I_2=5,91 мА, I_3=1,69 мА, I_4=0,63 мА.

2.3. ВАХ нелінійного резистивного елемента описуємо виразом $i_0=a_2U^2$. Довести що гармонічна напруга $u=U_m\cos\omega t$, до якої підключений нелінійний елемент, викликає в ньому негармонічний струм.

2.4. ВАХ нелінійного резистивного елемента апроксимована поліномом $i=a_0+a_1u+a_3u^3$. Знайти частоти всіх складових струму, якщо до елемента підключена напруга: а) $u = U_m \cos\omega_0 t$, б) $u = U_0 + U_m \cos\omega_0 t$.

Відповідь: а) постійна складова I_0, перша I_1, та третя I_3 гармоніки.

б) постійна складова I_0, перша I_1, друга I_2 та третя I_3 гармоніки.

2.5. До нелінійного резистивного елемента, ВАХ якого описується поліномом $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$ підключена напруга $U = U_m \cos\omega t$. При якій умові постійна складова струму не залежить від амплітуди напруги U_m?

Відповідь: при a_2=0

Питання для самоперевірки.

1. Чому при гармонічному впливі форма струму у нелінійному безінерційному елементі є негармонічною функцією?
2. Якою повинна бути функція струму в нелінійному безінерційному елементі, аби ряд Фур'є включав тільки косинусоїдальні складові?
3. Від чого залежать амплітуди гармонічних складових струму у безінерційному нелінійному елементі?
4. Як визначається кут відсічки при кусково-лінійній апроксимації?
5. Від чого залежать значення функції Берга?
6. Запишіть формулу розкладання струму вольтамперної характеристики в ряд Тейлора.
7. Запишіть вираз для вольтамперної характеристики нелінійного елемента при показниковій апроксимації.
8. У чому полягає суть методів трьох та п'яти ординат?
9. Від чого залежить точність визначення амплітуд гармонік при методах трьох та п'яти ординат?

Глава 3
Безінерційні нелінійні перетворення.

3.1. Класифікація нелінійних перетворень.

До викладених у розділі ВЗ застосувань нелінійних кіл необхідно додати наступні перетворення в нелінійних колах:

- нелінійне підсилення,
- обмеження,
- транспонування спектра,
- множення сигналів,
- ділення сигналів

Нелінійні перетворення сигналів здійснюються як за допомогою нелінійних так і параметричних елементів. В обох випадках в основі перетворення лежить нелінійна операція, частіше всього – множення.

Дослідження нелінійних кіл вимагає розв'язку нелінійних диференційних рівнянь, що робить цю задачу доволі складною. Але її можна спростити, якщо нелінійні залежності не будуть містити час у явній формі, тобто щоб нелінійні елементи вважалися безінерційними.

Розглянемо окремі види нелінійних перетворень.

3.2. Спектр струму нелінійного елемента при бігармонічному впливі.

Розглянемо нелінійний елемент, вольтамперна характеристика якого апроксимована поліномом другого порядку

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 \tag{3.1}$$

Вхідний вплив є бігармонічним сигналом

$$u_{\text{НЕ}}(t) = U_0 + U_{m1}\cos\omega_1 t + U_{m2}\cos\omega_2 t \tag{3.2}$$

Тоді струм у нелінійному елементі

$$i(t)=a_0+a_1U_{m1}\cos\omega_1 t+a_1U_{m2}\cos\omega_2 t+a_2U_{m1}^2\cos^2\omega_1 t+$$
$$+2a_2U_{m1}U_{m2}\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t+a_2U_{m2}^2\cos^2\omega_2 t$$

або

$$i(t)=a_0+\frac{1}{2}a_2(U_{m1}+U_{m2})+a_1U_{m1}\cos\omega_1 t+a_1U_{m2}\cos\omega_2 t+$$
$$+\frac{1}{2}a_2U_{m1}^2\cos 2\omega_1 t+\frac{1}{2}a_2U_{m2}^2\cos 2\omega_2 t+ \qquad (3.3)$$
$$+a_2U_{m1}U_{m2}\cos(\omega_1+\omega_2)t+a_2U_{m1}U_{m2}\cos(\omega_1-\omega_2)t$$

У виразі (3.3) з’явились нові спектральні складові з частотами $2\omega_1$, $2\omega_2$ (кратні частоти) і $\omega_1+\omega_2$ та $\omega_1-\omega_2$ (комбінаційні частоти). Спектральна діаграма вхідного та вихідного сигналів представлена на рис.3.1.

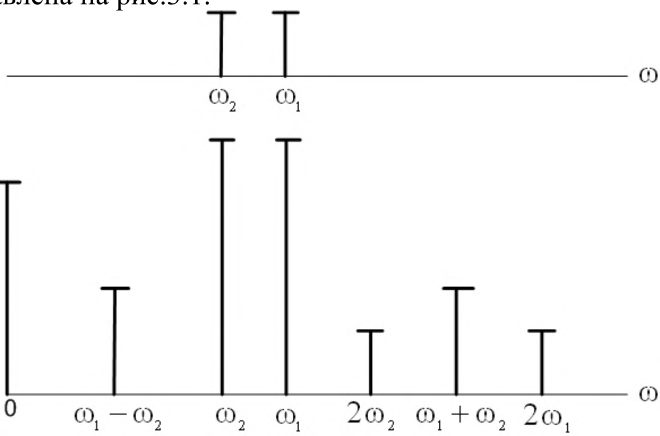


Рис. 3.1

Якщо вольтамперна характеристика нелінійного елемента апроксимована поліномом третього порядку, тобто в (3.1) з’являється додаткова компонента

$$i_3(u)=a_3(u-U_0)^3 \qquad (3.4)$$

то при вхідному впливі по (3.2) одержуємо додатковий струм

$$
\begin{aligned}
i_3(t) &= (\frac{3}{4}a_3U_{m1}^3 + \frac{3}{2}a_3U_{m1}U_{m2}^2)\cos\omega_1 t + \\
&+(\frac{3}{4}a_3U_{m2}^3 + \frac{3}{2}a_3U_{m1}^2U_{m2})\cos\omega_2 t + \\
&+\frac{1}{4}a_3U_{m1}^{\ 3}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{4}a_3U_{m2}^3\cos 3\omega_2 t + \\
&+\frac{3}{4}a_3U_{m1}^2U_{m2}\cos(2\omega_1+\omega_2)t + \frac{3}{4}a_3U_{m1}^2U_{m2}\cos(2\omega_1-\omega_2)t + \\
&+\frac{3}{4}a_3U_{m1}U_{m2}^2\cos(2\omega_2+\omega_1)t + \frac{3}{4}a_3U_{m1}U_{m2}^2\cos(2\omega_2-\omega_1)t
\end{aligned}
\qquad (3.5)
$$

Додатковий струм $i_3(t)$ трохи змінює рівень гармонік з частотами ω_1, ω_2. Суттєвим є виникнення нових спектральних складових з частотами $3\omega_1$, $3\omega_2$, $2\omega_1+\omega_2$, $2\ \omega_1-\omega_2$, $2\omega_2+\omega_1$, $2\ \omega_2-\omega_1$.

Якщо в загальному випадку апроксимації вольтамперної характеристики нелінійного елемента певною нелінійною функцією вхідний вплив містить М гармонік, то у струмі з'являються компоненти з комбінаційними частотами

$$\omega_{\text{ком}} = (n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \ldots + n_{\text{м}}\omega_{\text{м}}) \qquad (3.6)$$

де $n_1, n_2, \ldots, n_{\text{м}}$ – будь-які цілі числа, додатні і від'ємні та нуль.
Комбінаційні частоти об'єднують по групам, для яких

$$|n_1| + |n_2| + \ldots = N \qquad (3.7)$$

Тут N – порядок комбінаційних частот.
Так при бінарному впливі для нелінійного елемента з вольтамперною характеристикою, апроксимованою поліномом третього порядку одержимо наступні частоти (табл. 3.1)

Табл. 3.1

№	Частоти
1	ω_1, ω_2
2	$2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1+\omega_2, \omega_1-\omega_2$
3	$3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1\omega_1+\omega_2, 2\omega_1-\omega_2, 2\omega_2+\omega_1, 2\omega_2-\omega_1$

3.3. Нелінійне резонансне підсилення.

Процес підсилення особливо сигналів малої амплітуди – звичайно лінійний. Підсилення сигналів великої амплітуди вимагає урахування нелінійності вольтамперної характеристики активних елементів, наприклад, транзисторів. Крім того у лінійному режимі коефіцієнт корисної дії (ККД) підсилювача не перевищує 50%.

Використовуючи нелінійний режим, можна досягти ККД значно більше, ніж 50% і навіть наблизитись до 100%.

Розглянемо транзисторний підсилювач (рис.3.2)

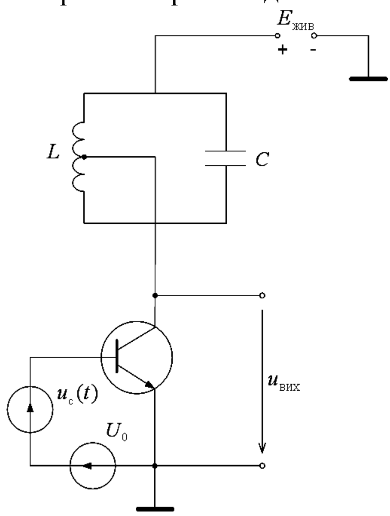


Рис. 3.2

з навантаженням у вигляді паралельного коливально контуру LC, настроєного на частоту вхідного сигналу.

Приймемо, що вольтамперна характеристика нелінійного елемента (залежність струму колектора $i_к$ від напруги база-емітер транзистора $u_{БЕ}$) апроксимована кусково-лінійною залежністю (рис.3.3).
Вхідний сигнал на переході база-емітер транзистора

$$u_{вх}(t) = U_0 + u_с(t) = U_0 + U_{mвх}\cos\omega t$$

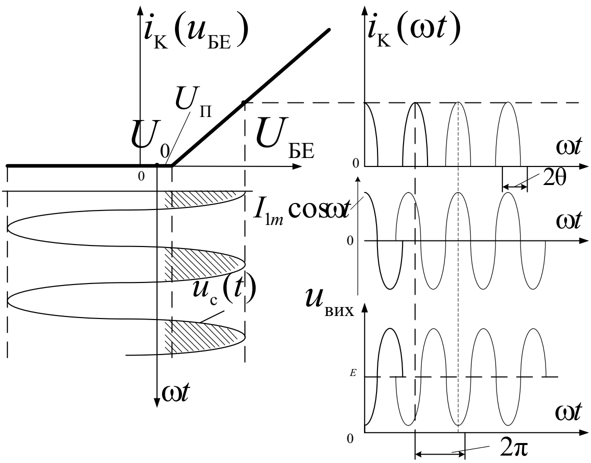


Рис. 3.3

Струм колектора $i_к$ має вигляд косинусоїдальних імпульсів з відсічкою. Коливальний *LC*-контур відфільтровує із складного спектра колекторної напруги складову з частотою $\omega_{рез} = \omega$. Інші складові з частотами 2ω, 3ω та ін. у вихідній напрузі відсутні.
Вихідна напруга підсилювача

$$U_{mвих} = I_{m1}R_{рез} = SU_{mвх}\gamma_1(\Theta)R_{рез} \quad (3.8)$$

де: $R_{рез}$ - активний опір *LC*- контуру на резонансній частоті ;

I_{m1} - амплітуда першої гармоніки колекторного струму;
S – крутизна вольтамперної характеристики транзистора;
$\gamma_1(\Theta)$ - функція Берга першого порядку по (2.17).

При степеневій апроксимації одержуємо для першої гармоніки вихідної напруги у відповідності з (2.23)

$$U_{m\text{вих}} = (a_1 U_{m\text{вх}} + \frac{3}{4} a_3 U_{m\text{вх}}^3 + \frac{5}{8} a_5 U_{m\text{вх}}^5 + ...) R_{\text{рез}} \quad (3.9)$$

Робота нелінійного підсилювача оцінюється коливальною характеристикою – залежністю вихідної напруги від вхідної

$$U_{m\text{вих}} = f(U_{m\text{вх}}) \quad (3.10)$$

Очевидно, при кусково-лінійній апроксимації коливальній характеристиці відповідає вираз (3.8), при степеневій апроксимації – вираз (3.9). Графік типової коливальної характеристики наведений на рис.3.4

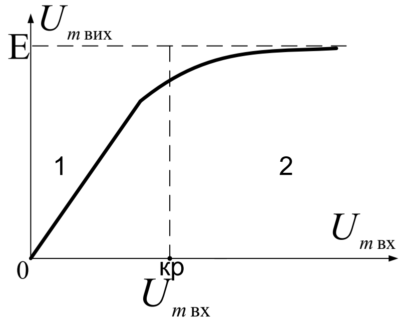


Рис. 3.4

Природна вимога до коливальної характеристики, особливо при підсиленні амплітудно-модульованих сигналів – лінійність. Так по (3.8) характеристика буде лінійною при $\Theta=90^0$, тому що по (2.17) функція Берга $\gamma_1(\Theta) = \frac{\Theta}{\pi} = 0.5$. По (3.9) характеристика буде лінійною при $a_3=a_5=...=0$. Ширина лінійної ділянки 1 на рис.3.4 визначає динамічний діапазон підсилювача. Ділянка 2 відповідає перенапруженому режиму роботи підсилювача. В цьому режимі після певної критичної напруги $U_{m\text{вх}}^{\text{кр}}$ вихідна напруга наближено дорівнює напрузі живлення підсилювача *E*.

Цей режим неприродний для підсилення амплітудно-модульованих сигналів.

3.4. Випрямлення

Процес перетворення змінного струму у постійний називається випрямленням. Тобто на виході випрямляча повинна бути постійна напруга, а на вході змінна. Отже після перетворення з'являється нова спектральна складова – постійна напруга, яка може бути одержана за допомогою нелінійного чи параметричного елемента.

Нелінійне перетворення виконується за допомогою степеневого полінома

$$L\left[u_{\text{вх}}(t)\right] = a_0 + a_1 u_{\text{вх}}(t) + a_2 u_{\text{вх}}^2(t) + \ldots + a_k u_{\text{вх}}^k(t) \quad (3.11)$$

Якщо

$$u_{\text{вх}}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.12)$$

то при використанні найпростішого полінома другого порядку, одержуємо для струму нелінійного елемента

$$i(t) = a_0 + a_2 U_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = a_0 + \frac{a_2 U_m^2}{2} + \frac{a_2 U_m^2}{2} \cos 2(\omega t + \varphi) \quad (3.13)$$

Графічно процес випрямлення за допомогою нелінійного елемента з параболічною характеристикою наведений на рис.3.5

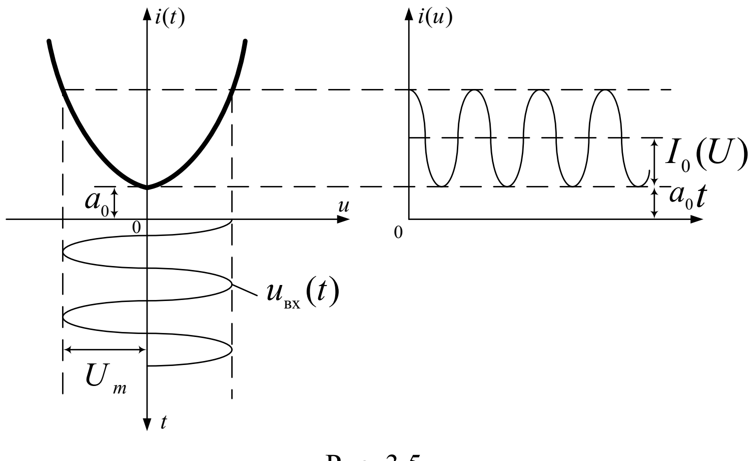


Рис. 3.5

Характеристика перетворення (характеристика випрямлення)

$$I_0(U) = \frac{a_2 U_m^2}{2} \qquad (3.13)$$

Друга гармоніка усувається за допомогою фільтра.

На практиці використовується багато схем випрямлення, основними з яких є однополуперіодна, двохполуперіодна та мостова схеми, нелінійними елементами в яких використовують напівпровідникові діоди.

3.5. Резонансне множення частоти

Множення частоти – задача, яка може бути повністю розв'язана в синтетичній формі. Позначимо вхідний сигнал

$$x = A\cos\omega t \qquad (3.14)$$

Обернена функція

$$\omega t = \arccos\frac{x}{A} \qquad (3.15)$$

Вихідний сигнал повинен бути *n*-ю гармонікою частоти ω

$$y = B\cos n\omega t \qquad (3.16)$$

Або з урахуванням (3.15)

$$y = B\cos(n\arccos\frac{x}{A}) \qquad (3.17)$$

Це є характеристика нелінійного елемента, який реалізує множення частоти в *„n”* разів без генерації коливань інших частот і тому фільтр на виході такого перетворювача не потрібен.

При A=B=1 вираз (3.17) являє собою поліном Чебишева *n*-го порядку. При n=0

$$y_0(x) = \cos(0) = 1 \qquad (3.18)$$

Характеристика реалізує режим випрямлення

При n=1

$$y1(x = \cos(\arccos x)) = x \qquad (3.19)$$

Характеристика реалізує режим підсилення.

При n=2

$$y_2(x) = 2x^2 - 1 \tag{3.20}$$

Характеристика реалізує режим множення частоти у 2 рази.

На рис.3.6 наведені графіки поліномів Чебишева першого, другого і третього порядку.

Проте реалізація оптимальних характеристик пов'язана з великими труднощами і не завжди можлива. Характеристики реальних нелінійних елементів суттєво відрізняються від оптимальних.

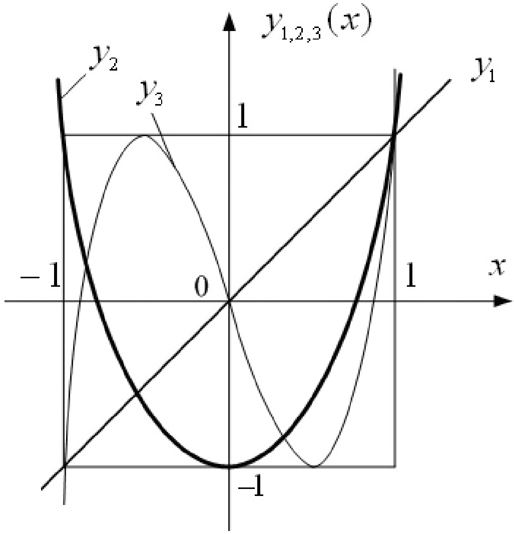


Рис. 3.6

Розглянемо нелінійний підсилювач по рис. 3.2 з вольтамперною характеристикою транзистора по рис.3.3. Якщо *LC*-контур настроїти на частоту $n\omega$, то одержимо режим множення частоти.

Вихідна напруга множника частоти

$$U_{твих} = SU_{твх}R_{рез}\gamma_n(\Theta) \tag{3.21}$$

Функція Берга n-го порядку $\gamma_n(\Theta)$ по (2.18) зменшується з ростом „n". Залежність функції Берга γ від „n" і кута θ наведені на рис.3.7.

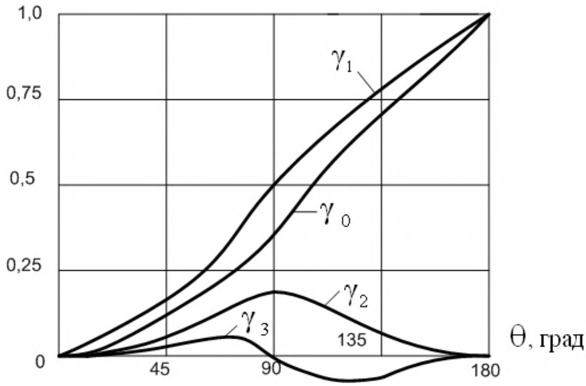


Рис. 3.7

З графіків видно, що оптимальний кут відсічки визначається співвідношенням

$$\Theta_{\text{опт}} = \frac{180^0}{n} \tag{3.22}$$

Потреба у множниках частоти виникає, наприклад, при створенні джерел гармонічних коливань з високою стабільністю частоти, якщо безпосереднє генерування таких коливань у заданому діапазоні неможливе, але в розпорядженні є стабільний низькочастотний генератор.Функція Берга зменшується з ростом „*n*", тому розглянутий нелінійний множник частоти використовується для множення у 2-3 рази. Тому краще каскадно вмикати два множника частоти для більшого коефіцієнта множення.

Другим методом множення частоти навіть у десятки разів полягає у перетворенні вхідного гармонічного сигналу у послідовність коротких прямокутних відеоімпульсів. Спектри такої послідовності мають складові високих частот, амплітуди яких повільно зменшуються з ростом частоти. Необхідність другого каскаду множення частоти відпадає.

Приклад 3.1.

Нелінійний елемент має кубічну ВАХ $i(u) = a_3(U - U_0)^3$. Вхідна напруга є сумою трьох гармонічних коливань: $u(t) = U_0 + U_{m1}\cos\omega_1 t + U_{m2}\cos\omega_2 t + U_{m3}\cos\omega_3 t$. Знайти частоти всіх комбінаційних складових струму.

Розв'язок.

Якщо степінь ВАХ дорівнює трьом, то будуть з'являтися комбінаційні частоти першого порядку: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ та третього порядку: $3\omega_1, 3\omega_2, 3\omega_3, \left|\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3\right|, \left|\pm 2\omega_1 \pm \omega_2\right|, \left|\pm 2\omega_1 \pm \omega_3\right|,$

$\left|\pm 2\omega_2 \pm \omega_1\right|, \left|\pm 2\omega_2 \pm \omega_3\right|, \left|\pm 2\omega_3 \pm \omega_1\right|, \left|\pm 2\omega_3 \pm \omega_2\right|$

Фактично треба враховувати тільки різні частоти:

$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_1 - \omega_2 + \omega_3, \omega_1 + \omega_2 - \omega_3, \omega_1 - \omega_2 - \omega_3,$

$2\omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_1 + \omega_3, 2\omega_1 - \omega_3, 2\omega_2 + \omega_1,$

$2\omega_2 - \omega_1, 2\omega_2 + \omega_3, 2\omega_2 - \omega_3, 2\omega_3 + \omega_1, 2\omega_3 - \omega_1,$

$2\omega_3 + \omega_2, 2\omega_3 - \omega_2$

Приклад 3.2.

Розрахувати резонансний підсилювач з послідовним вмиканням *LC*-контура (рис. 3.8).

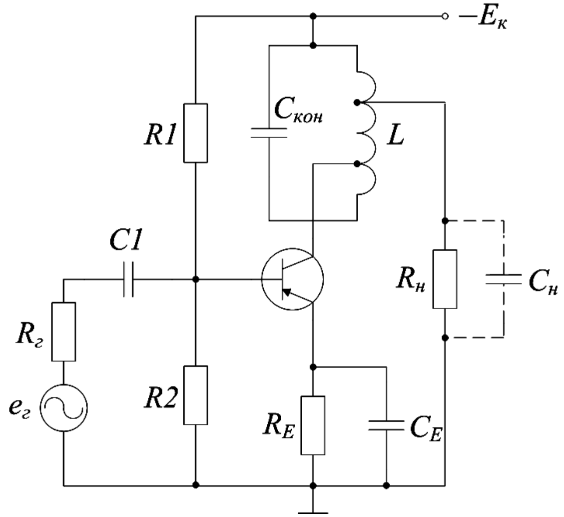


Рис. 3.8

Підсилювач повинен працювати від джерела сигналу з опором $R_Г$=0,1 кОм на навантаження $R_Н$=1 кОм, $C_Н$=100 пФ і забезпечувати резонансну частоту f_0=500 кГц, добротність $Q_{екв} \geq 35$ і підсилення на резонансній частоті $K_{U0} \geq 20$.

Розв'язок

1. Підбираємо транзистор з верхньою граничною частотою $f_Т$=150 МГц>> f_0=500 кГц. Це транзистор ГТ 305А.

2. Еквівалентна схема підсилювача по змінному струму наведена на рис. 3.9,

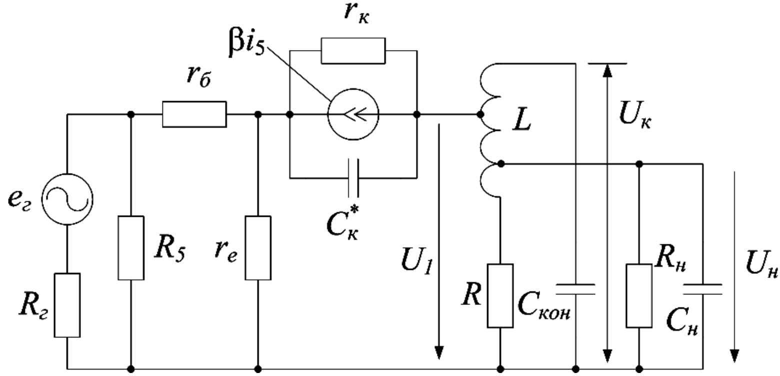


Рис. 3.9

а його амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) – на рис.3.10.

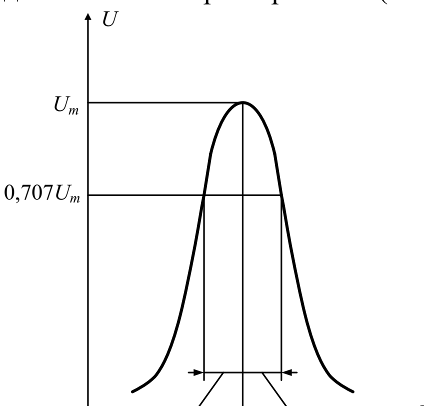


Рис. 3.10

3. Для обраного транзистора ємність колекторного переходу $C_К$ =7 пФ. Вихідна ємність підсилювача $C_{вих} = C_К(1+\beta)$. Для транзистора ГТ 305 β =29. Тоді $C_{вих} = 7 \cdot 30 = 210$ пФ.

4. Ємність навантаження $C_Н$ =100 пФ. Щоб ємності $C_{вих}$ та $C_Н$ не впливали на резонансну частоту, обираємо ємність контура $C_{кон} >> C_{вих} + C_Н$ =210+100=310 пФ. Приймаємо $C_{кон}$ =10000 пФ.

5. Визначаємо індуктивність контура *L*.

$$L = \frac{1}{\omega_0 C_{кон}} = \frac{1}{(2\pi f_0^2)C_{кон}} = \frac{1}{(2 \cdot 3{,}14 \cdot 500 \cdot 10^3) \cdot 10000 \cdot 10^{-12}} = 10 \text{ мкГн}$$

6. Відомо, що в діапазоні 0,1 – 1 МГц типові величини добротності котушок $Q_{кот} = 20 \div 100$. Оберемо $Q_{кот} = 50$. Звідси визначимо активний опір втрат в контурі *R*.

$$R = \frac{\rho}{Q} = \sqrt{\frac{L}{C_{кон}}} \cdot \frac{1}{Q} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-6}}{10000 \cdot 10^{-12}}} \cdot \frac{1}{50} = 0{,}63 \text{ Ом}$$

7. Опір контура при резонансі R_0

$$R_0 = Q_{кон}^2 \cdot R = \frac{\rho^2}{R} = \frac{L}{C_{кон} \cdot R} = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{10000 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}63} = 1470 \text{ Ом}$$

8. Полоса пропускання контура $2\Delta f$ зв'язана з добротністю контура *Q* співвідношенням $Q = \frac{f_0}{2\Delta f}$. Добротність підсилювача $Q_{екв}$ менше добротності контура *Q*, що зв'язано з шунтуючим впливом навантаження і вихідного опору підсилювача $R_{вих}$. Відомо, що

$R_{вих} = \frac{r_к}{1+\beta}$, де $r_к$ -диференційний опір колекторного переходу, ввімкненого у зворотному напрямку. Значення $r_к$ лежать у межах 0,5 – 1 МОм. Приймаємо $r_к$ =620 кОм. Тоді

$$R_{\text{вих}} = \frac{620 \cdot 10^3}{1+30} = 20 \text{ кОм}\,.$$

9. Введемо поняття еквівалентного опору контуру підсилювача $R_{\text{екв}}$, який враховує часткове підключення індуктивності LC-контура

$$\frac{1}{R_{\text{екв}}} = \frac{1}{R_0} + \frac{m_{\text{к}}^2}{R_{\text{вих}}} + \frac{m_{\text{н}}^2}{R_{\text{н}}}\,,$$

де $m_{\text{к}} = \dfrac{U_1}{U_{\text{к}}}$- коефіцієнт вмикання контура до транзистора, $m_{\text{н}} = \dfrac{U_{\text{н}}}{U_{\text{к}}}$ - коефіцієнт вмикання контура до навантаження.

Приймаємо $m_{\text{к}}$ =1, $m_{\text{н}}$ =0,5. Тоді

$$R_{\text{екв}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_0} + \dfrac{m_{\text{к}}^2}{R_{\text{вих}}} + \dfrac{m_{\text{н}}^2}{R_{\text{н}}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{1470} + \dfrac{1^2}{20 \cdot 10^3} + \dfrac{0,5^2}{1 \cdot 10^3}} = 1,08 \text{ кОм}\,.$$

10. Знайдемо добротність всього підсилювача

$$Q_{\text{екв}} = \frac{Q_{\text{кон}} \cdot R_{\text{екв}}}{R_0} = \frac{50 \cdot 1,08 \cdot 10^5}{1470} = 36,5\,,$$

що практично дорівнює необхідній добротності підсилювача $Q_{\text{екв}} \geq 35$, яка вимагається в умові задачі.

11. Знайдемо підсилення на резонансній частоті

$$K_{U0} = \frac{\beta R_{\text{екв}} m_{\text{к}} m_{\text{н}}}{R_{\Gamma} + r_{\text{б}} + r_{\text{е}}(1+\beta)} = \frac{29 \cdot 1080 \cdot 1 \cdot 0,5}{100 + 400 + 10 \cdot (1+29)} = 20$$

Тут опір емітера $r_{\text{е}}$, який, звичайно, лежить у межах від одиниць до десятків Ом, взятий $r_{\text{е}}$ =10 Ом. Опір бази $r_{\text{б}} >> r_{\text{е}}$ і складає 100–500 Ом. Тут взято $r_{\text{б}}$ = 400 Ом.

Отже, вимога задачі забезпечити коефіцієнт підсилення на резонансній частоті $K_{U0} \geq 20$ виконана.

12. Відносно опорів $R1, R2, R_{\text{Е}}$, які забезпечують положення робочої точки на характеристиці транзистора, то вони визначаються графічно, виходячи з напруги живлення $E_{\text{К}}$ і вихідної потужності підсилювача.

3.6. Методичні вказівки.

Треба зважати на те, що нелінійні елементи дозволяють виконувати цілий спектр нелінійних перетворень, але всі вони базуються на основних закономірностях, зв’язаних з характеристиками цих елементів. Теорія розрахунку і аналізу електричних кіл передбачає запис і розв’язання диференційних рівнянь, а конкретно для нелінійних кіл – нелінійних диференційних рівнянь, що значно ускладнює задачу аналізу. Тому немає необхідності, а іноді і можливості, проводити точний аналіз роботи нелінійних пристроїв, і можна обмежитись найбільш важливими і характерними показниками. Так при аналізі спектрального складу струму нелінійного елемента при бігармонічному впливі треба звернути увагу на генерування комбінаційних частот і їх групування. В розділі „ Нелінійне резонансне підсилення ” при вхідних сигналах високого рівня більш точні результати дає метод „ кута відсічки ”, а для сигналів малого рівня – метод поліноміальної апроксимації. Задача випрямлення – також розв’язується за допомогою степеневого полінома. А от задача резонансного множення частоти може бути повністю розв’язана в синтетичній формі, хоча необхідна характеристика нелінійного елемента доволі складна для реалізації – вона повинна бути синтезованою на основі поліномів Чебишева різних порядків. Тому задачу множення частоти спрощують настройкою *LC*-фільтра в навантаженні резонансного підсилювача на вихідну частоту множника. Для повноти змісту цього розділу треба познайомитись також з методами збільшення коефіцієнта множення шляхом каскадного включення окремих множників чи трансформацією спектра вхідного сигналу у широкополосний з повільним зменшенням амплітуд гармонік і подальшим виділенням потрібної складової вузькополосним фільтром.

Задачі

3.1. Для умов Прикладу 3.2 визначити коефіцієнти вмикання контура $m_к$ та $m_н$, при яких забезпечується значення $Q_{екв}$ =30. Визначити при цьому значення K_{U0}. Прийняти $m_к = m_н$

Відповідь: $m_к = m_н$ =0,67; K_{U0} =15,0

3.2. Обрати елементи паралельного LC-контура, який забезпечує резонансну частоту 100 кГц та полосу пропускання 5 кГц. Прийняти активний опір втрат в контурі рівним 100 Ом.

Відповідь: $L_{кон}$ =3,18 мГн, $C_{кон}$ =796 пФ.

3.3. Розрахувати резонансну частоту f_0 та коефіцієнт підсилення на резонансній частоті K_{U0} підсилювача, зображеного на рис. 3.11.

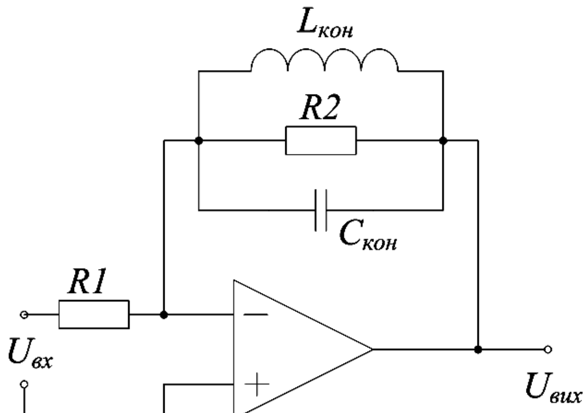


Рис. 3.11

Вважати операційний підсилювач ідеальним.

Відповідь: f_0 =5 кГц, K_{U0} =5.

3.4. Повторювач частоти (рис. 3.12)

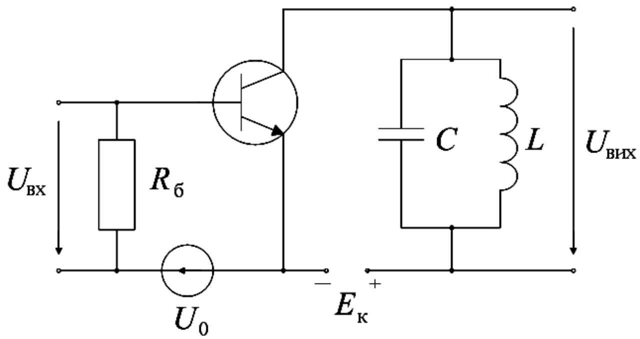


Рис. 3.12

зібраний на транзисторі (рис. 3.12), вольт-амперна характеристика якого $i_К = f(U_{БЕ})$ зображена на рис. 3.13.

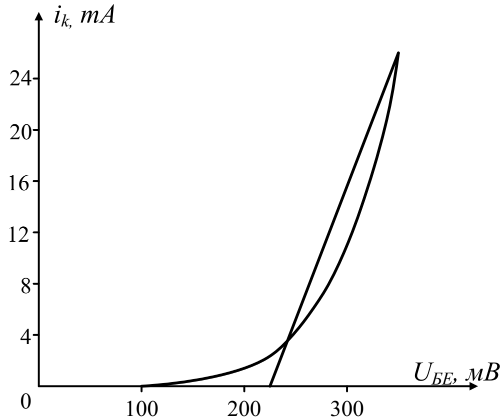


Рис. 3.13

На вхід схеми подається напруга $U_{вх}(t) = U_{m\ вх} \cos \omega t$. Вихідні дані $U_{m\ вх}$=0,2 В, $f_{вх} = 5 \cdot 10^5$ Гц, L=0,2 мГн, Q=30.

Необхідно апроксимувати вольт-амперну характеристику кусково-лінійним методом і знайти:

1. Оптимальний кут відсічки $\theta_{опт}$.
2. Напругу зміщення U_0.
3. Амплітуду напруги на контурі по третій гармоніці U_{m3}
4. Ємність контуру *C*.

Відповідь: $\theta_{\text{опт}} = 60^\circ$, U_0=0,1 В, U_{m3}=132,6 В, C=563 пФ.

Питання для самоперевірки.

1. Назвіть відомі вам перетворення в нелінійних колах.
2. Які спектральні складові з'являються у струмі нелінійного елемента при бігармонічному впливі, якщо вольтамперна характеристика нелінійного елемента апроксимована поліномом другого порядку?
3. Які додаткові компоненти з'являються у струмі, якщо вольтамперна характеристика нелінійного елемента апроксимована поліномом третього порядку?
4. Що таке комбінаційні частоти?
5. Який коефіцієнт корисної дії може бути досягнутий в одному каскаді резонансного підсилювача?
6. Запишіть вираз для вихідної напруги резонансного підсилювача на транзисторі, вольтамперна характеристика якого апроксимована кусково-лінійною залежністю.
7. Що таке коливальна характеристика?
8. За допомогою степеневого полінома якого порядку можливе випрямлення вхідного сигналу?
9. Який вид полінома Чебишева повинна реалізувати вольтамперна характеристика нелінійного елемента, щоб реалізувати режим множення частоти?
10. Поясніть реалізацію режиму множення частоти в резонансному підсилювачі.
11. Запишіть вираз для оптимального кута відсічки для резонансного множника частоти.
12. Поясніть спосіб множення частоти з коефіцієнтом множення 10 – 20.

Глава 4

Модульовані коливання

4.1. Амплітудно-модульовані коливання

При модуляції для коливання, що несе інформацію про корисний сигнал, використовують просте гармонічне коливання

$$u_{\text{нес}}(t) = U\cos(\omega t + \varphi) \qquad (4.1)$$

Якщо у виразі (4.1) змінною величиною, що несе інформацію про корисний низькочастотний сигнал, є амплітуда $U(t)$, то одержуємо амплітудну модуляцію. Амплітудно-модульований сигнал (АМ-сигнал) записується у вигляді

$$u_{\text{АМ}}(t) = U(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (4.2)$$

де ω_0, φ_0 - частота і фаза несучого коливання.

Модульований корисний сигнал позначимо $S(t)$. Цей сигнал додається до амплітуди несучого коливання. Тоді огинаюча АМ-сигнала визначається по виразу

$$U(t) = U_m\left[1 + MS(t)\right] \qquad (4.3)$$

Тут U_m – амплітуда несучого коливання без модуляції. М – коефіцієнт амплітудної модуляції.

Розглянемо однотональну АМ-модуляцію, коли модульований низькочастотний сигнал є гармонічним коливанням однієї частоти Ω.Такий сигнал записується так

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_m(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t \qquad (4.4)$$

Для одержання такого коливання на вхід резонансного підсилювача подають суму несучого коливання

$$u_{\text{нес}}(t) = U_{m\text{нес}}\cos\omega_0 t \qquad (4.5)$$

і низькочастотного модульованого коливання

$$u_{\text{мод}}(t) = U_{m\text{мод}}\cos\Omega t \qquad (4.6)$$

Схема модулятора наведена на рис.4.1.

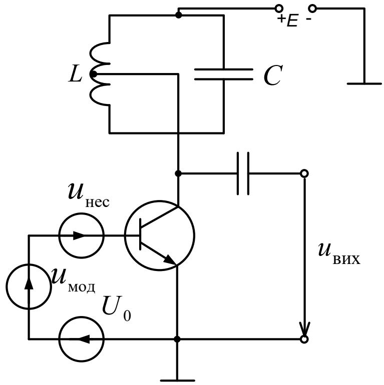


Рис. 4.1

Графіки роботи модулятора – на рис.4.2. Частота *LC*-контуру $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$.

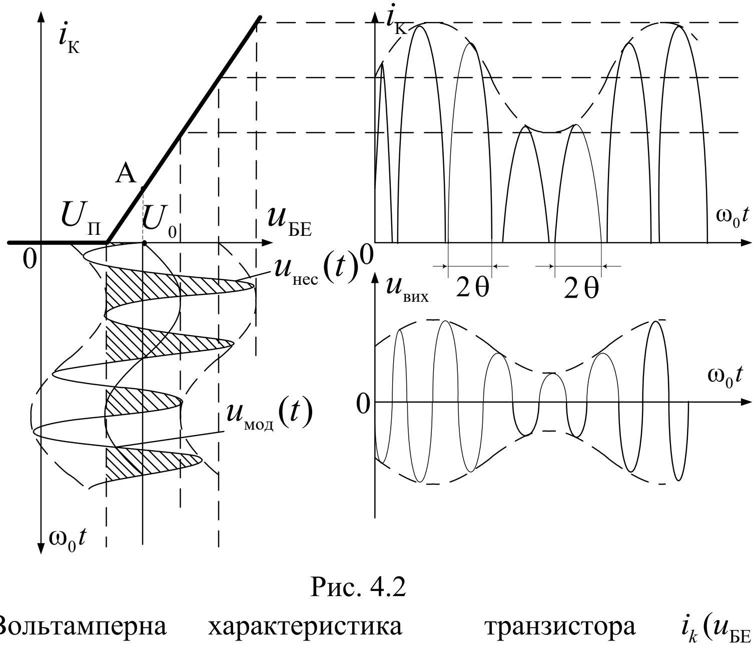


Рис. 4.2

Вольтамперна характеристика транзистора $i_k(u_{\text{БЕ}})$ апроксимована кусково-лінійною залежністю. Видно, що робоча точка А переміщується по вольтамперній характеристиці в такт з модулюючим коливанням $u_{\text{мод}}(t)$. В результаті кут відсічки θ безперервно змінюється, амплітуда першої гармоніки колекторного струму змінюється у часі по закону зміни кута відсічки, тобто по закону модулюючого коливання.

Розглянемо процес модуляції зі спектральної точки зору. Вхідний сигнал підсилювача

$$u_{\text{вх}}(t) = U_0 + U_{m\text{нес}} \cos \omega_0 t + U_{m\text{мод}} \cos \Omega t \qquad (4.7)$$

Тут $\Omega << \omega_0$

Спектр вхідного сигналу представлений на рис.4.3а.

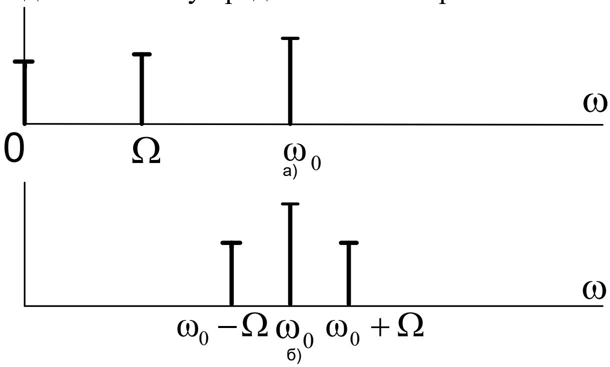


Рис. 4.3

Приймемо степеневу апроксимацію вольтамперної характеристики транзистора

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \ldots \qquad (4.8)$$

Після підстановки $u = u_{\text{вх}}(t)$ з (4.7), враховуючи, що коливальний *LC*-контур виділяє компоненти з частотою ω_0, одержуємо

$$i_{\text{АМ}}(t) = a_1 U_{m\text{нес}} \cos \omega_0 t + a_2 U_{m\text{нес}} U_{m\text{мод}} \cos(\omega_0 + \Omega)t +$$

$$+ a_2 U_{m\text{нес}} U_{m\text{мод}} \cos(\omega_0 - \Omega)t \qquad (4.9)$$

Спектр вихідного струму представлений по рис.4.3,б.

На резонансній частоті ω_0 і на близьких частотах $\omega_0 + \Omega$ і $\omega_0 - \Omega$ опір LC-контуру дорівнює $R_{\text{рез}}$. Тоді вихідна напруга

$$u_{\text{вих}}(t) = i_{\text{АМ}}(t) R_{\text{рез}} = a_1 R_{\text{рез}} U_{m\text{нес}} (1 + \frac{2a_2}{a_1} U_{m\text{мод}} \cos\Omega t) \cos\omega_0 t \quad (4.10)$$

Порівнюючи з (4.4), одержуємо для коефіцієнта модуляції

$$M = \frac{2a_2}{a_1} U_{m\text{мод}} \quad (4.11)$$

4.2. Балансний модулятор

З рис.4.3. видно, що значна частина потужності АМ-сигналу зосереджена в несучому коливанні на частоті ω_0.

На рис.4.4. несуче коливання $U_{m\text{нес}} \cos\omega_0 t$ подається на входи модуляторів АМ1, АМ2 синфазно.

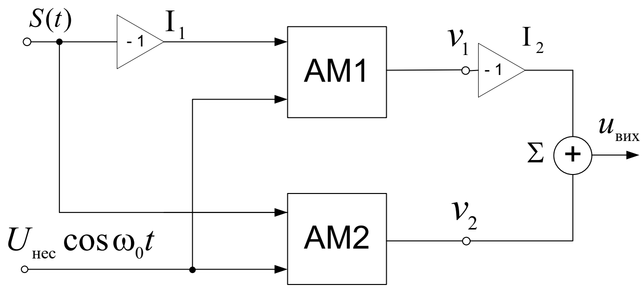


Рис. 4.4

Модулюючий сигнал $s(t) = u_{\text{мод}}(t) = U_{m\text{мод}} \cos\Omega t$ - протифазно (I_1 – інвертор, повертає фазу на 180^0). Тоді сигнали $\nu_1(t), \nu_2(t)$ на виходах модуляторів

$$
\begin{aligned}
\nu_1(t) &= U_{m\text{нес}}\left[1 - Ms(t)\right]\cos\omega_0 t \\
\nu_2(t) &= U_{\text{mнес}}\left[1 + Ms(t)\right]\cos\omega_0 t
\end{aligned}
\qquad (4.12)
$$

Після інвертора I_2 для сигнала $\nu_1(t)$ і суматора $\sum$ одержимо

$$
\begin{aligned}
& u_{\text{вих}}(t) = \nu_2 - \nu_1 = U_{m\text{нес}}\cos\omega_0 t + \\
& + MU_{m\text{нес}}s(t)\cos\omega_0 t - U_{m\text{нес}}\cos\omega_0 t + MU_{m\text{нес}}s(t)\cos\omega_0 t = \quad (4.13) \\
& = 2MU_{m\text{нес}}s(t)\cos\omega_0 t
\end{aligned}
$$

Тобто складова несучої частоти, яка не несе корисної інформації у вихідній напрузі балансного модулятора, відсутня.

4.3 Коливання при. кутовій модуляції

Якщо у виразі (4.1) змінна величина, що несе інформацію про корисний низькочастотний сигнал, є фаза $\varphi(t)$, то одержуємо фазову модуляцію. Фазомодульоване коливання (ФМ-сигнал) записується у вигляді

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right], \qquad (4.14)$$

де $\omega_0, \varphi(t)$ - частота і фаза модульованого коливання.

Представимо модулюючий сигнал як лінійну функцію низькочастотного сигналу u_Ω, який несе корисну інформацію

$$u_\Omega = U_\Omega \sin\Omega t \qquad (4.15)$$

Тоді закон зміни фази $\varphi(t)$ запишеться так

$$\varphi(t) = \varphi_0 + kU_\Omega \sin\Omega t, \qquad (4.16)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, φ_0 - початкова фаза високочастотного коливання.

Введемо позначення

$$kU_\Omega = \Delta\varphi = M_\varphi, \qquad (4.17)$$

де $\Delta\varphi$ - максимальна зміна фази, обумовлена низькочастотним модульованим сигналом; M_{φ} - індекс фазової модуляції.

Тоді ФМ коливання по (4.14), (4.16), (4.17)

$$u_{\text{ФМ}} = U_m \cos(\omega_0 t + M_{\varphi} \sin \Omega t + \varphi_0) \qquad (4.18)$$

У 30-х роках минулого століття американський інженер Є. Армстронг запропонував схему одержання сигналу з кутовою модуляцією (рис.4.5). Сигнал $\nu_1(t)$ на виході балансного модулятора БМ

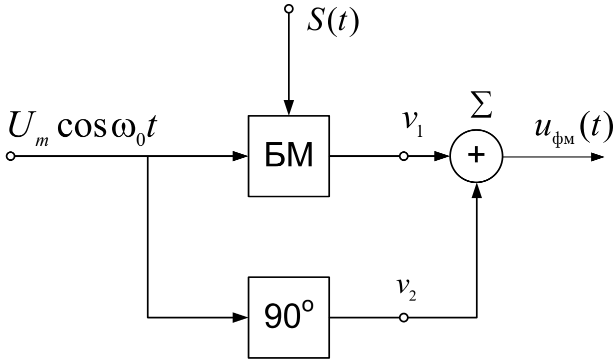


Рис. 4.5

$$\nu_1(t) = U_{m1} s(t) \cos \omega_0 t \qquad (4.19)$$

На виході фазообертача на 90 ел. Град (запізнення) формується сигнал

$$\nu_2(t) = U_{m2} \cos(\omega_0 t - 90^0) = U_{m2} \sin \omega_0 t \qquad (4.20)$$

Тут U_{m1}, U_{m2} амплітуди сигналів після БМ і фазообертача.

Вихідний сигнал після суматора $\sum$

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_{m1} s(t) \cos \omega_0 t + U_{m2} \sin \omega_0 t \qquad (4.21)$$

Це сигнал з кутовою модуляцією. Дійсно (рис.4.6) векторна діаграма сигналів показує, що повна фаза вихідного сигналу

$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t), \qquad (4.22)$$

де $\varphi(t)$ - кут між початковими фазами вхідного і вихідного сигналів. З рис. 4.6 видно, що

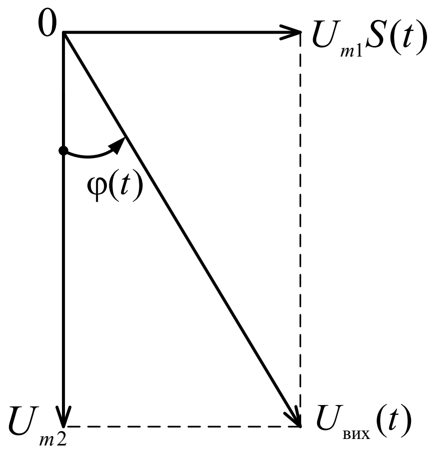


Рис. 4.6

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}\frac{U_{m1}s(t)}{U_{m2}} \tag{4.23}$$

Для лінійної залежності $\varphi(t)$ від *s(t)* треба щоб $U_{m2} >> U_{m1}$. Тоді

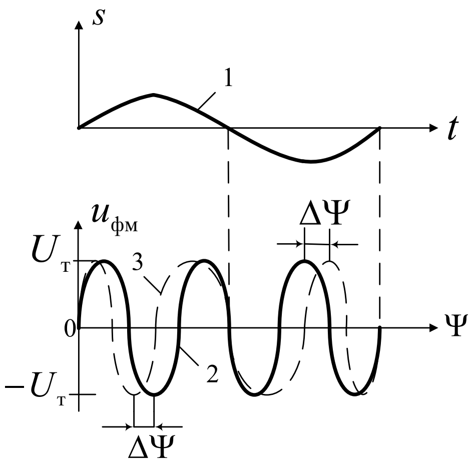
$$\varphi(t) \approx \frac{U_{m1}}{U_{m2}} s(t) \tag{4.24}$$

Миттєва частота вихідного сигналу з (4.23), (4.24)

$$\omega_{вих}(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} \approx \omega_0 + \frac{U_{m1}}{U_{m2}}\frac{ds(t)}{dt} \tag{4.25}$$

Якщо $U_{m2} >> U_{m1}$, то кут $\varphi(t)$ невеликий, модулятор Амстронга працює з малим індексом модуляції, тобто малою девіацією, частота змінюється в нешироких межах. Звідси для підвищення ефективності модулятора Армстронга необхідно множити частоту модулюючого сигнала.

На рис.4.7 зображені графіки коливань при кутовій модуляції.



1-модулюючий низькочастотний сигнал
2-модульоване гармонічне коливання
3-сигнал з кутовою модуляцією

Рис. 4.7

4.4. Частотна модуляція

При частотній модуляції зміна частоти ω несучого коливання повинна повторювати закон модулюючого сигнала.

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t \tag{4.26}$$

Фаза високочастотного коливання

$$\psi(t) = \int \omega dt = \int (\omega_0 t + \Delta\omega \cos \Omega t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t + \varphi_0, \tag{4.27}$$

де φ_0 - початкова фаза.

Тоді частотно-модульоване коливання

$$u_{ЧМ} = U_m \cos(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t) \tag{4.28}$$

Тут U_m - амплітуда немодульованого коливання, $\Delta\omega$ - максимальна зміна частоти – девіація частоти.

Позначимо

$$M_{\text{ч}} = \frac{\Delta\omega}{\Omega} \qquad (4.29)$$

Величина Мч є максимальною зміною фази і називається індексом частотної модуляції.

Отже ЧМ коливання по (4.28), (4.29)

$$u_{\text{ЧМ}} = U_m \cos(\omega_0 t + M_{\text{ч}} \sin \Omega t) \qquad (4.30)$$

Розглянемо спектр частотно-модульованого коливання по (4.30)

$$u_{\text{ЧМ}} = U_m \cos \omega_0 t \cos(M_{\text{ч}} \sin \Omega t) - U_m \sin \omega_0 t \sin(M_{\text{ч}} \sin \Omega t) \qquad (4.31)$$

Якщо $M_{\text{ч}} << 1$, то

$$\cos(M_{\text{ч}} \sin \Omega t) \approx 1,$$

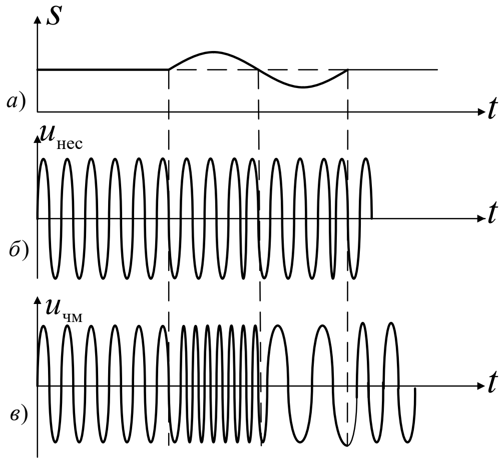
$$\sin(M_{\text{ч}} \sin \Omega t) \approx M_{\text{ч}} \sin \Omega t$$

Тоді по (4.31)

$$U_{\text{ЧМ}} = U_m \cos \omega_0 t - U_m M_{\text{ч}} \sin \Omega t \sin \omega_0 t =$$

$$= U_m \left[\cos \omega_0 t + \frac{M_{\text{ч}}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{M_{\text{ч}}}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \right] \qquad (4.32)$$

На рис.4.8 зображені графіки коливань при частотній модуляції.



а)модулюючий низькочастотний сигнал
б)немодульоване низькочастотне коливання
в)сигнал з частотною модуляцією

Рис. 4.8

Видно,що спектр найпростішого ЧМ коливання практично не відрізняється від спектра найпростішого АМ коливання.

При великих індексах модуляції спектр ЧМ коливання значно ускладнюється і включає несуче коливання з частотою ω_0 і нескінченний ряд коливань з частотами $\omega_0 \pm n\Omega$. Амплітуди цих коливань $U_m J_n(M_{\text{ч}})$ визначаються функціями Бесселя *n*-го порядка $J_n(M_{\text{ч}})$ від аргументу Мч.

Схема автогенератора частотно-модульованих коливань наведена на рис.4.9.

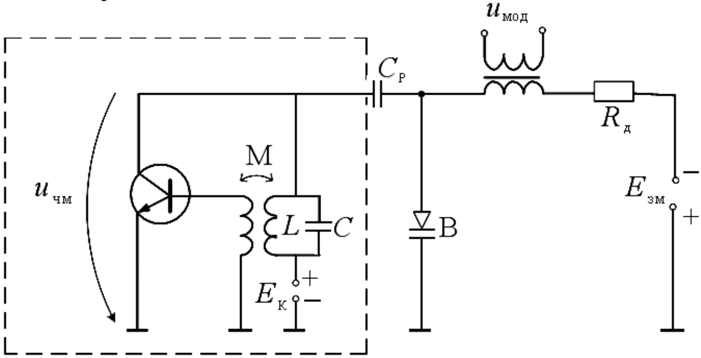


Рис. 4.9

Генератор (обведено пунктирною лінією) виробляє синусоїдальну напругу з резонансною частотою *LC*-контура. Зміна цієї частоти у відповідності з модулюючим сигналом $u_{\text{мод}}$ відбувається через зміну ємності контура за рахунок паралельно з'єднаного параметричного елемента – варактора В, ємність якого визначається напругою зміщення *E*ЗМ і модулюючою напругою $u_{\text{мод}}$.

4.5. Імпульсна модуляція

Розрізняють чотири види імпульсної модуляції, при яких визначений параметр імпульсів є пропорціональним модулюючому сигналу $u_{\text{мод}}(t)$:

1) амплітудно-імпульсна модуляція (АІМ), при якій змінюється амплітуда імпульсів;
2) широтно-імпульсна модуляція (ШІМ), при якій змінюється ширина імпульсів;
3) фазово-імпульсна модуляція (ФІМ), при якій змінюється фаза імпульсів;
4) частотно-імпульсна модуляція (ЧІМ), при якій змінюється частота імпульсів.

Приклад широтно-імпульсної модуляції наведений на рис.4.10.

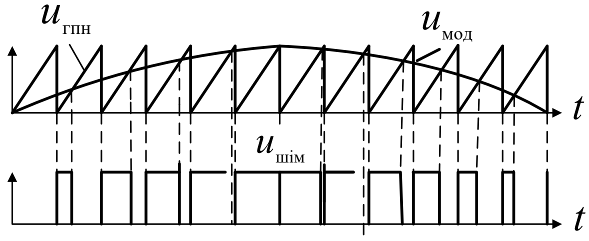


Рис. 4.10

Тут модулююча низькочастотна напруга $u_{\text{мод}}$, наприклад, синусоїдальної форми порівняється з напругою $u_{\text{ГПН}}$ генератора пилкоподібної напруги, частота якого набагато більша частоти модулюючого сигналу. В моменти рівності цих напруг спрацьовує пристрій рівності сигналів (компаратор). В результаті на виході компаратора формується послідовність прямокутних імпульсів, тривалість яких пропорційна миттєвому значенню модулюючої напруги $u_{\text{мод}}$.

Широтно-імпульсна модуляція використовується в системах зв'язку, телеметрії, системах управління та ін.

Приклад 4.1.

Транзистор, що використаний у амплітудному модуляторі, має характеристику $i_{\text{к}} = f(U_{\text{БЕ}})$ зі зламом при кусково-лінійній апроксимації в точці $U_{\text{П}}$ =0,2 В. Амплітуда несучого коливання на вході $U_{m\ \text{нес}}$ =0,3 В, амплітуда модулюючого сигналу

$U_{m\ \text{мод}}$ =0,1 В, початкове зміщення U_0 =0,25 В, крутизна похилої ділянки характеристики S = 116 мА/В.

Визначити:

- граничні значення кута відсічки,
- максимальне та мінімальне значення амплітуди першої гармоніки колекторного струму,
- коефіцієнт модуляції колекторного струму,
- максимальне та мінімальне значення амплітуди першої гармоніки вихідної напруги підсилювача, навантаженням якого служить коливальний контур. Прийняти резонансний опір контура $R_{\text{рез}}$ =200 Ом

Розв'язок.

Знайдемо значення кутів відсічки θ.

Кут θ визначається зі співвідношення

$$\cos\theta = \frac{U_{\Pi} - U_0 \pm U_{m\ \text{мод}}}{U_{m\ \text{нес}}}$$

Звідси

$$\theta_{\max} = \arccos\frac{0,2 - 0,25 - 0,1}{0,3} = \arccos(-0,5) = 120^{\circ} = 2,09 \text{ рад}$$

$$\theta_{\min} = \arccos\frac{0,2 - 0,25 + 0,1}{0,3} = \arccos(0,166) = 80^{\circ} = 1,4 \text{ рад}$$

Амплітуди колекторного струму першої гармоніки

$$I_{1m} = SU_m\gamma_1(\theta)$$

де U_m - амплітуда напруги на вході транзистора

$$U_{m\ \max} = U_{m\ \text{нес}} + U_{m\ \text{мод}} = 0,3 + 0,1 = 0,4 \text{ В}$$

$$U_{m\ \min} = U_{m\ \text{нес}} - U_{m\ \text{мод}} = 0,3 - 0,1 = 0,2 \text{ В}$$

$\gamma_1(\theta)$ - функція Берга першого порядку

$$\gamma_1(\theta_{\max}) = \frac{1}{\pi}(\theta_{\max} - \sin\theta_{\max}\cos\theta_{\max}) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(2,09 - \sin 120^\circ \cos 120^\circ) = 0,805$$

$$\gamma_1(\theta_{\min}) = \frac{1}{\pi}(\theta_{\min} - \sin\theta_{\min}\cos\theta_{\min}) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(1,4 - \sin 80^\circ \cos 80^\circ) = 0,390$$

Тепер

$$I_{1m}^{\max} = SU_{m\ \max}\gamma_1(\theta_{\max}) = 116 \cdot 0,4 \cdot 0,805 = 0,037 \text{ А=37 мА}$$

$$I_{1m}^{\min} = SU_{m\ \min}\gamma_1(\theta_{\min}) = 116 \cdot 0,4 \cdot 0,39 = 0,009 \text{ А=9 мА}$$

Коефіцієнт модуляції колекторного струму

$$M = \frac{I_{1m}^{\max} - I_{1m}^{\min}}{I_{1m}^{\max} + I_{1m}^{\min}} = \frac{0,037 - 0,009}{0,037 + 0,009} = 0,61$$

Амплітуда першої гармоніки вихідної напруги

$$U_{1m}^{\max} = I_{1m}^{\max} \cdot R_{\text{рез}} = 0,037 \cdot 200 = 7,4 \text{ В}$$

$$U_{1m}^{\min} = I_{1m}^{\min} \cdot R_{\text{рез}} = 0,009 \cdot 200 = 1,8 \text{ В}$$

4.7. Методичні вказівки

Модуляція відноситься до групи інформаційних перетворень. При цьому перетворенню підлягають параметри сигналу: амплітуда, частота, фаза чи форма сигналу.

Перетворення сигналів виконується у відповідності з поставленою метою, яка часто втілена у так званому корисному сигналові. Цей сигнал може бути виділений у подальших перетвореннях, а також служити як засіб досягнення поставленої мети. Але у всіх перетвореннях має місце спектральне перетворення. Математичний апарат аналізу спектрів при модуляційних перетвореннях доволі складний, особливо при частотній, фозовій та імпульсній модуляції. Тому порядок вивчення розділу, викладений у послідовності розділів, можна вважати оптимальним: амплітудна модуляція, кутова модуляція, частотна модуляція, імпульсна модуляція. Звичайно не всі аспекти окремих розділів висвітлені однаково детально, але загальне уявлення про основні процеси при різних видах модуляції розкриті в достатній мірі.

Треба зауважити, що пристроїв для реалізації різних видів модуляції дуже багато, тому увага зосереджена не на аналізі роботи окремих пристроїв, а на аналізі процесів в них.

Дуже коротко описана імпульсна модуляція, хоча цей вид модуляції широко застосовується в системах управління різними об'єктами, а не тільки в радіотехнічних системах.

Задачі.

4.1. Амплітудно-модульоване коливання описується формулою

$$U_{\text{АМ}}(t) = 130\left[1 + 0,25\cdot\cos(10^2 t + 30^\circ) + 0,75\cdot\cos(3\cdot 10^2 t + 45^\circ)\right]\times$$
$$\times\cos(10^5 t + 60^\circ)$$

Обчислити амплітуди, частоти та початкові фази всіх спектральних складових цього коливання.

Відповідь:

Несуча складова: $\omega_{\text{н}} = 10^5$ рад/с, $U_{m\ \text{нес}}$ =130 В, $\varphi_{\text{нес}} = 60^\circ$

Верхні бічні складові: $\omega_{\text{н}} + \Omega_1 = 100100\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$, $U^{+}_{m\ \text{бічн}1}$ =16,25 В.

$\varphi^{+}_{\text{бічн}1} = 90^\circ$

$\omega_{\text{н}} + \Omega_2 = 10030\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$, $U^{+}_{m\ \text{бічн}2}$ =48,75 В

$\varphi^{+}_{\text{бічн}2} = 105^\circ$

Нижні бічні складові: $\omega_{\text{н}} - \Omega_1 = 99900\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$, $U^{-}_{m\ \text{бічн}1}$ =16,25 В.

$\varphi^{-}_{\text{бічн}1} = 30^\circ$

$\omega_{\text{н}} - \Omega_2 = 99700\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$, $U^{-}_{m\ \text{бічн}2}$ =48,75 В

$\varphi^{-}_{\text{бічн}2} = 15^\circ$

4.2. Оцінити число мовних радіоканалів N, які можна розташувати в діапазоні частот від 0,5 до 1,5 МГц (середньохвильовий мовний діапазон). Прийняти діапазон звукових частот від 100 Гц до 12 кГц. Передбачити захисний інтервал між каналами для запобігання перехресних завад між каналами шириною 1 кГц.
Відповідь: N=40

4.3. Радіостанція, що працює в УКХ-діапазоні з несучою частотою f_0=80 МГц, випромінює фазово-модульований сигнал, промодульований частотою F=15 кГц. Індекс модуляції M_{φ}=12. Знвйти межі, в яких змінюється миттєва частота сигнала Δf
Відповідь: Δf =180 кГц, $f_{\min}$ =79,82 МГц, $f_{\max}$ =80,18 МГц

4.4. Частотно-модульований сигнал з амплітудою 2,7 В має миттєву частоту, що змінюється у часі по закону $\omega(t) = 10^9\left[1 - 10^{-4}\cos(2\cdot 10^3 t)\right]$. Знайти індекс модуляції $M_{\text{ч}}$ і записати математичну модель сигнала $u_{\text{ЧМ}}(t)$
Відповідь: $M_{\text{ч}}$ =50
$u_{\text{ЧМ}}(t) = 2,7\cos\left[10^9 t + 50\sin(2\cdot 10^3 t)\right]$

4.5. Визначити індекс модуляції $M_{\text{ч}}$ частотно-модульованого сигнала, промодульованого низькою частотою F =7 кГц. Несуча частота f_0=180 МГц, максимальне значення частоти $f_{\max}$ =182,5 МГц.
Відповідь: $M_{\text{ч}}$ =357

Питання для самоперевірки.

1. Для чого виникає потреба у переносі спектра низькочастотного сигнала у діапазон високих частот?
2. В чому полягає суть амплітудної модуляції?

3. Які частотні складові включає спектр АМ-сигналу при степеневій апроксимації вольтамперної характеристики нелінійного елемента рядом Тейлора другого порядку і однотональній модуляції.
4. Запишіть вираз для коефіцієнта амплітудної модуляції при степеневій апроксимації вольтамперної характеристики нелінійного елемента.
5. Що таке балансний модулятор, для яких цілей він застосовується?
6. В чому полягає суть кутової модуляції?
7. Що таке індекс кутової модуляції?
8. Зобразьте схему модулятора Е. Армстронга.
9. Який недолік у кутового модулятора Армстронга?
10. В чому полягає суть частотної модуляції?
11. Яка різниця в спектрах частотно-модульованого коливання при індексі модуляції $M_{\text{ЧМ}} << 1$ і при невиконанні цієї умови.
12. Поясніть технічну реалізацію модуляції ємності в *LC*-генераторі частотно-модульованих коливань.
13. В чому полягає суть імпульсної модуляції?
14. Які види імпульсної модуляції вам відомі?

Глава 5
Детектування

5.1. Загальні поняття

Детектування – це процес, зворотний модуляції. При модуляції один з параметрів високочастотного коливання змінюється пропорційно первинному сигналу. Детектування полягає у відновленні первинного сигналу. При детектуванні змінюється спектральний склад сигнала (корисний сигнал переноситься у низькочастотний діапазон). Таке перетворення може бути виконано тільки у нелінійному пристрої.

На рис. 5.1. наведена узагальнена схема детектора, яка складається з нелінійного перетворювача НП, на виході якого з вхідного модульованого коливання $u_{вх}$ виділяється постійна складова I_0, і фільтра нижніх частот ФНЧ, який запобігає проходженню на вихід детектора високочастотних складових.

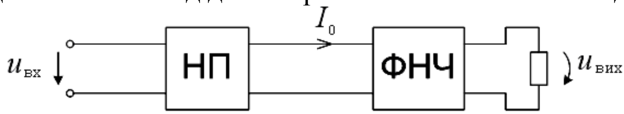


Рис. 5.1

Величина I_0 повинна залежати:

- в детекторі АМ-сигналів – від амплітуди U,
- в детекторі ЧМ-сигналів – від частоти ω,
- в детекторі ФМ-сигналів – від фази φ.

5.2. Детектування амплітудно-модульованих коливань

При цьому на вхід детектора подається амплітудно-модульований високочастотний сигнал

$$u_{вх}(t) = U_{mвх}(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t \qquad (5.1)$$

На виході детектора з’являється низькочастотний сигнал, пропорційний корисному сигналу

$$u_{вих}(t) = U_{mвих}\cos\Omega t \qquad (5.2)$$

Ефективність роботи детектора оцінюється коефіцієнтом детектування

$$K_{\text{дет}} = \frac{U_{m\text{вих}}}{MU_{m\text{вх}}} \tag{5.3}$$

Тут $MU_{\text{вх}}$ - „розмах” зміни амплітуди високочастотного вхідного сигналу.

5.2.1. Колекторний детектор

Розглянемо схему колекторного детектора (рис.5.2).

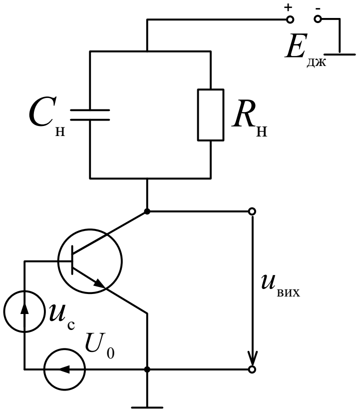


Рис. 5.2

Навантаженням транзисторного підсилювача служить фільтр нижніх частот (ФНЧ) у вигляді $R_{\text{Н}}C_{\text{Н}}$-кола. ФНЧ виділяє низькочастотну складову частоти Ω корисного сигнала і відфільтровує високочастотні складові частоти ω_0 несучого коливання. Для цього повинні виконуватись співвідношення

$$R_{\text{Н}}C_{\text{Н}} \gg \frac{1}{\omega_0}, \qquad R_{\text{Н}}C_{\text{Н}} \ll \frac{1}{\Omega} \tag{5.4}$$

5.2.2. Лінійне детектування

Вхідна напруга на базі транзистора

$$u_{БЕ}(t) = u_С(t) + U_0 = U_0 + U_{mвх}(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t \quad (5.5)$$

Якщо амплітуда $U_{mвх}$ АМ сигнала досить велика, треба використати кусково-лінійну апроксимацію вольт-амперної характеристики транзистора $i_к(u_{БЕ})$. Графічно процеси у транзисторному детекторі зображені на рис.5.3.

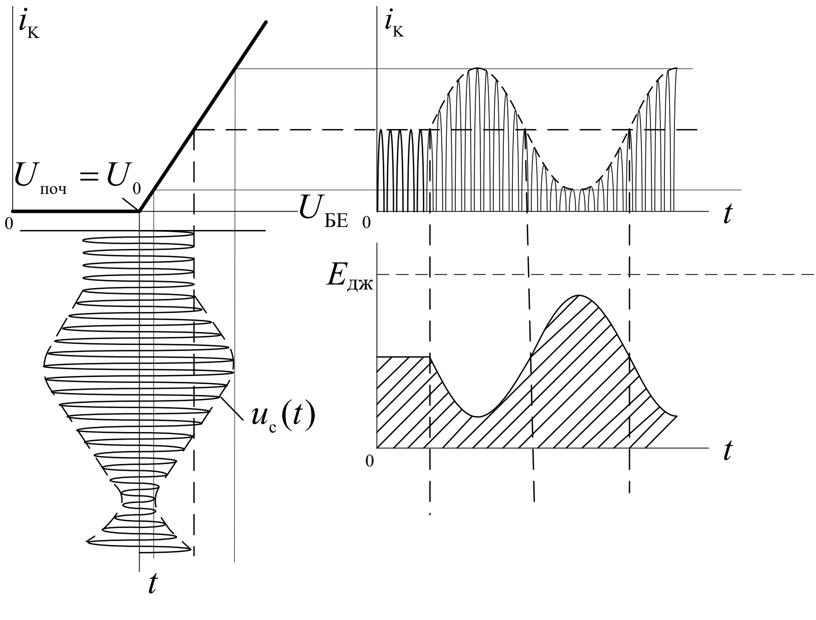


Рис. 5.3

Тут прийнято $U_{поч} = U_0$. Тоді робоча точка забезпечує кут відсічки $\Theta = 90^0$. Колекторний струм являє собою послідовність імпульсів, промодульованих по амплітуді у відповідності з низькочастотним корисним сигналом $u_С(t)$. Нульова складова струму змінюється у часі з частотою Ω корисного сигналу. Очевидно

$$I_0(t) = SU_{m\text{вх}}(1 + M\cos\Omega t)\gamma_0(90^0) \qquad (5.6)$$

З (2.16) функція Берга $\gamma_0(90^0) = \dfrac{1}{\pi} = 0{,}318$. Тому

$$I_0(t) = 0{,}3185 U_{m\text{вх}}(1 + M\cos\Omega t) \qquad (5.7)$$

Вихідна напруга детектора

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= E_{\text{дж}} - I_0(t)R_{\text{Н}} = \\ &= E_{\text{дж}} - 0{,}3185 R_{\text{Н}} U_{m\text{вх}}(1 + M\cos\Omega t) \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Звідси коефіцієнт детектування

$$K_{\text{дет}} = \frac{U_{m\text{вих}}}{MU_{\text{вх}}} = \frac{0{,}3185 R_{\text{Н}} MU_{m\text{вх}}}{MU_{m\text{вх}}} = 0{,}3185 R_{\text{Н}} \qquad (5.9)$$

Отже амплітуди сигналів на вході і виході детектора зв’язані лінійною залежністю. Тому такий детектор називають лінійним.

У лінійному детекторі відсутні спотворення корисного сигнала.

5.2.3. Квадратичне детектування

Якщо амплітуда $U_{m\text{вх}}$ АМ-сигнала доволі мала, використовують степеневу апроксимацію вольтамперної характеристики транзистора.Наприклад,апроксимація поліномом другого порядку

$$i(u) = a_0 + a_1(u_{\text{вх}} - U_0) + a_2(u_{\text{вх}} - U_0)^2 \qquad (5.10)$$

Вхідний сигнал візьмемо у формі (5.5) підставимо у (5.10). Одержимо

$$i(t) = a_0 + a_1 U_{m\text{вх}} (1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t + \\ + a_2 U_{m\text{вх}}^2 (1 + M\cos\Omega t)^2 \cos^2\omega_0 t \qquad (5.11)$$

Після розкриття дужок і виконання перетворень у струмі i з'являються високочастотні складові частот $\omega_0, \omega_0 + \Omega,\ \omega_0 - \Omega,$ $2\omega_0, 2\omega_0 + \Omega,\ 2\omega_0 - \Omega,\ 2(\omega_0 + \Omega),\ 2(\omega_0 - \Omega),$ які відфільтровуються фільтром нижніх частот $R_{\text{Н}}C_{\text{Н}}$. У спектрі струму i(t) присутні також низькочастотні складові

$$i_{\text{НЧ}} = \mathrm{a}_2 M U_{m\text{вх}}^2 \cos\Omega t + \frac{1}{4} a_2 M^2 U_{m\text{вх}}^2 \cos 2\Omega t\,, \qquad (5.12)$$

які виділяються фільтром нижніх частот.

Напруга на виході детектора

$$u_{\text{вих}}(t) = E_{\text{дж}} - a_2 M R_{\text{Н}} U_{m\text{вх}}^2 \cos\Omega t - \frac{1}{4} a_2 M^2 R_{\text{Н}} U_{m\text{вх}}^2 \cos 2\Omega t \qquad (5.13)$$

З (5.13) видно, що вихідна напруга пропорційна квадрату амплітуди вхідної напруги $U_{m\text{вх}}^2$. Тому такий детектор називається квадратичним.

Складова $\frac{1}{4} a_2 M^2 R_{\text{Н}} U_{m\text{вх}}^2 \cos 2\Omega t$ в виразі (5.13) спотворює корисний сигнал частоти Ω. Ці спотворення сигналу називаються нелінійними. Для їх оцінки введений коефіцієнт нелінійних спотворень

$$K_{\text{нел}} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \ldots}}{U_1} \qquad (5.14)$$

Для квадратичного детектора

$$K_{\text{нел}} = \frac{a_2 M^2 R_{\text{Н}} U_{m\text{вх}}^2}{4a_2 M R_{\text{Н}} U_{m\text{вх}}^2} = \frac{M}{4} \qquad (5.15)$$

Тобто нелінійні спотворення зростають з ростом глибини модуляції *M*.Тому, звичайно, перед детектуванням АМ-коливань їх спочатку підсилюють до рівня кількох вольт, а потім використовують лінійне детектування.

Коефіцієнт детектування при квадратичному детектуванні

$$K_{\text{дет}} = \frac{U_{m\text{вих}}}{MU_{m\text{вх}}} = \frac{a_2 M R_{\text{Н}} U_{m\text{вх}}^2}{MU_{m\text{вх}}} = a_2 R_{\text{Н}} U_{m\text{вх}} \qquad (5.16)$$

5.2.4. Синхронне детектування

Синхронне детектування амплітудно-модульованих коливань базується на використанні параметричного елемента, параметр якого (провідність, коефіцієнт передачі та ін.) змінюється з несучою частотою АМ-сигнала (синхронно з ним). Звичайно, параметричний елемент реалізується за допомогою нелінійного елемента, параметр якого (наприклад, провідність) змінюється з частотою ω_0. В результаті утворюється схема множника сигналів.

Запишемо АМ-сигнал

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_m(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t \qquad (5.17)$$

Керуючий сигнал

$$u_{\text{к}}(t) = U_{m\text{к}}\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (5.18)$$

Їх добуток

$$
\begin{aligned}
&u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{АМ}}(t) + u_{\text{к}}(t) = \\
&= U_m(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t U_{m\text{к}}\cos(\omega_0 t + \varphi) = \\
&= U_m U_{m\text{к}}(1 + M\cos\Omega t)\frac{1}{2}\left[\cos(2\omega_0 t + \varphi) + \cos\varphi\right]
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

Складова вихідного сигналу

$$
u_{\text{вих}\Omega}(t) = \frac{1}{2}U_m U_{m\text{к}}(1 + M\cos\Omega t)\cos\varphi \tag{5.20}
$$

є корисною. Її можна виділити за допомогою фільтра нижніх частот. Амплітуда корисного сигналу

$$
U_{\text{вих}\,\Omega}(t) = \frac{M}{2}U_m U_{m\text{к}}\cos\Omega t\cos\varphi \tag{5.21}
$$

залежить від фази φ несучого коливання. При $\varphi = 0$ амплітуда $U_{\text{вих}\,\Omega}$ стає максимальною. На рис.5.4. наведений графічний процес синхронного детектування.

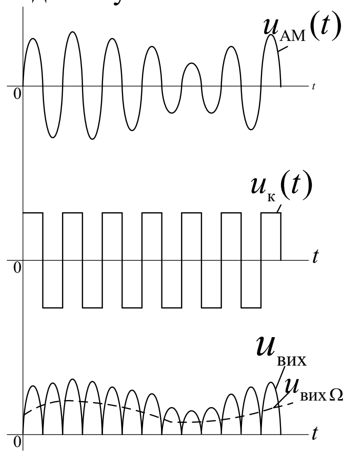


Рис. 5.4

Керуючий сигнал $u_{\text{к}}(t)$ синхронно з АМ-сигналом змінює коефіцієнт передачі з 1 до „-1”. В результаті вихідний сигнал $u_{\text{вих}}$ має вигляд випрямленої напруги, низькочастотна складова якого $u_{\text{вих}2}$ являє собою корисний сигнал низької частоти Ω.

5.3. Діодний детектор

Діодний детектор широко використовується на практиці. Схема діодного детектора наведена на рис.5.5.

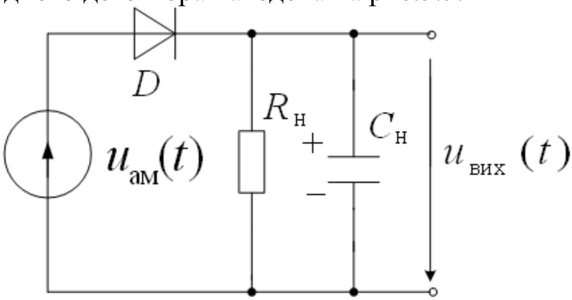


Рис. 5.5

Розглянемо роботу діодного детектора при вхідному немодульованому сигналі (рис.5.6.)

$$u_{вх}(t) = U_{m вх} \cos \omega t$$

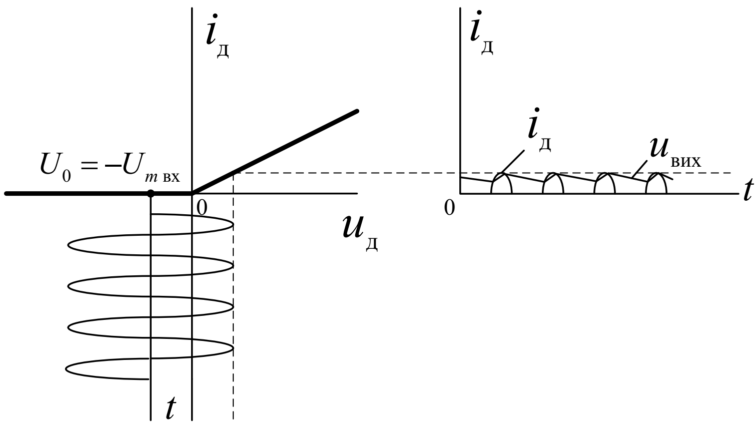


Рис. 5.6

Будемо вважати, що вольтамперна характеристика діода Д апроксимована кусково-лінійною залежністю з нульовою початковою напругою

$$i(u)=\begin{cases}0 \text{ при } u<0\\ Su \text{ при } u\geq 0\end{cases}$$

Напруга $$u_{\text{вих}}(t)=I_0(t)R_{\text{Н}}\approx U_{m\text{вх}}, \qquad (5.22)$$

де $I_0(t)$ - постійна складова струму діода.

Параметри фільтра $R_{\text{Н}}$,$C_{\text{Н}}$ обираються по (5.4)

Конденсатор $C_{\text{Н}}$ в схемі рис.5.5. заряджається через малий опір відкритого діода Д, а розряджається через достатньо великий опір $R_{\text{Н,}}$ тому час заряду $\Delta t_{\text{зар}}$ набагато менше часу розряду $\Delta t_{\text{розр}}$. В результаті вхідна напруга змінюється мало і залишається приблизно рівній амплітуді вхідного сигналу $U_{m\text{вих}}\cong U_{m\text{вх}}$. Звідси

$$\cos\Theta=\frac{U_{\text{поч}}-U_0}{U_{m\text{вх}}}=\frac{-U_0}{U_{m\text{вх}}}\approx\frac{U_{m\text{вих}}}{U_{m\text{вх}}}=1,\ \Theta\approx 0 \qquad (5.23)$$

При вхідному впливі амплітудно-модульованого сигналу (рис.5.7) напруга зміщення діода змінюється по закону модулюючого низькочастотного сигналу.

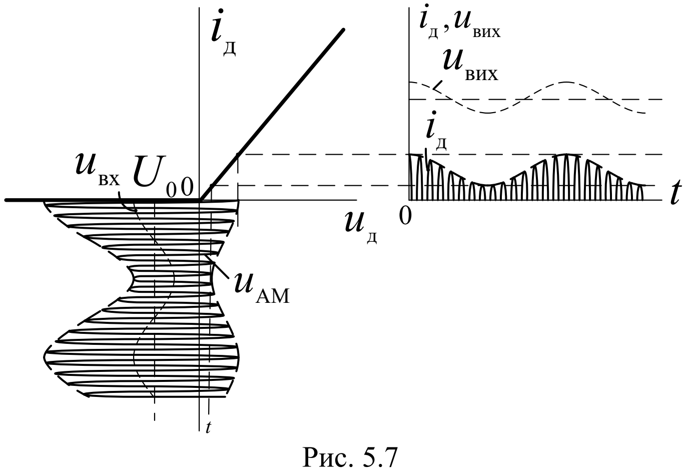


Рис. 5.7

Аналогічно змінюється вихідна напруга детектора $u_{\text{вих}}$.

Коефіцієнт детектування

$$K_{\text{дет}} = \frac{U_{m\text{вих}}}{U_{m\text{вх}}} = \frac{U_{m\text{вх}} \cos\Theta}{U_{m\text{вх}}} = \cos\Theta \approx 1 \qquad (5.24)$$

Якщо умова (5.4) не виконується, то з’являються спотворення вихідного корисного сигнала. Наприклад, якщо ємність $C_{\text{Н}}$ велика і умова $\frac{1}{\Omega C_{\text{Н}}} >> R_{\text{Н}}$ не виконується, то конденсатор розряджається дуже повільно і у вихідній напрузі з’являються спотворення (рис.5.8).

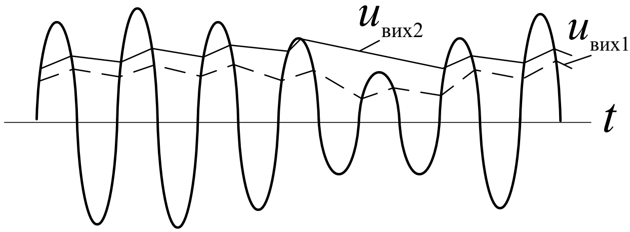


Рис. 5.8

Тут $u_{\text{вих}1}$ - відповідає корисному сигналу, $u_{\text{вих}2}$ - сигнал зі спотворенням. Якщо ж ємність $C_{\text{Н}}$ мала і умова $\frac{1}{\omega_0 C_{\text{Н}}} << R_{\text{Н}}$ не виконується, конденсатор швидко розряджається і у вихідній напрузі знов з’являються спотворення (вихідна напруга набуває форму коротких імпульсів) (рис.5.9)

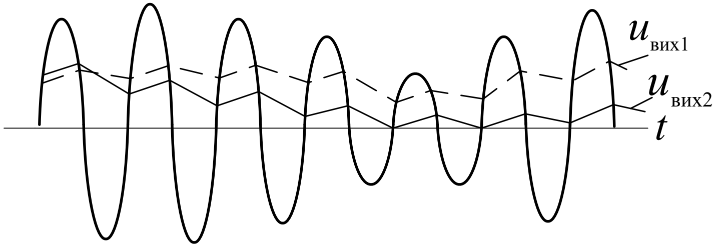


Рис. 5.9

5.4. Детектування фазово-модульованих коливань

Фазово-модульований сигнал має вигляд

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_{m1}\sin\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right] \qquad (5.25)$$

Це коливання подається на нелінійний елемент, вольтамперна характеристика якого записується у вигляді полінома другого порядку

$$i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 \qquad (5.26)$$

Схема фазового детектора наведена на рис.5.10.

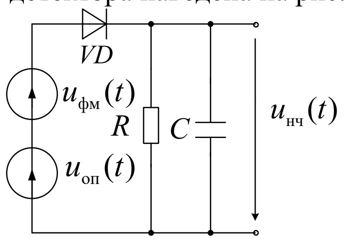


Рис. 5.10

Тут опорний немодульований сигнал $u_{\text{ОП}}(t)$ має частоту модульованого сигнала

$$u_{\text{ОП}}(t) = U_{m2}\cos\omega_0 t \qquad (5.27)$$

Тоді струм нелінійного елемента

$$i(t) = a_0 + a_1\left[u_{\text{ФМ}}(t) + u_{\text{ОП}}(t)\right] + a_2\left[u_{\text{ФМ}}(t) + u_{\text{ОП}}(t)\right]^2 \qquad (5.28)$$

У виразі (5.28) після підстановки одержуємо доданок

$$\begin{aligned} &2a_2 U_{m1} U_{m2}\sin\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right]\cos\omega_0 t = \\ &= a_2 U_{m1} U_{m2}\sin\left[2\omega_0 t + \varphi(t)\right] + a_2 U_{m1} U_{m2}\sin\varphi(t) \end{aligned} \qquad (5.29)$$

Перша складова у виразі (5.29) фільтрується низькочастотним *RC*-фільтром. На виході фільтра залишається низькочастотний сигнал

$$u_{\text{НЧ}}(t) = a_2 U_{m1} U_{m2} R \sin \varphi(t) \qquad (5.30)$$

яка несе інформацію про корисний сигнал.

При малій девіації фази $\varphi(t)$

$$u_{\text{НЧ}}(t) \cong a_2 U_{m1} U_{m2} R \varphi(t) \qquad (5.31)$$

Недоліки фазового детектора:

1) великі спотворення при значній девіації фази,
2) необхідність жорсткого підтримання частоти опорного сигнала.

5.5. Детектування частотно-модульованих коливань

При частотній модуляції корисне повідомлення пропорціональне відхиленню миттєвої частоти сигнала від частоти несучого коливання.

Одним із способів виконання частотного детектування полягає у перетворенні ЧМ-сигнала в сигнал з неглибокою амплітудною модуляцією. Для цього ЧМ-коливання подають на нелінійний частотний фільтр, наприклад, на розстроєний коливальний контур (рис.5.11).

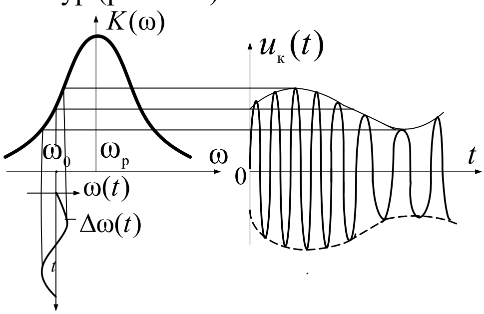


Рис. 5.11

Схема частотного детектора наведена на рис.5.12. Частотно-модульований струм $i_{ЧМ}$ від вхідного сигналу $u_{вх}$ подається на коливальний контур $R_Е$, L_1, C_1. На виході контура одержуємо АМ-коливання $u_к$, яке є вхідним сигналом для звичайного амплітудного детектування Д, C, R.

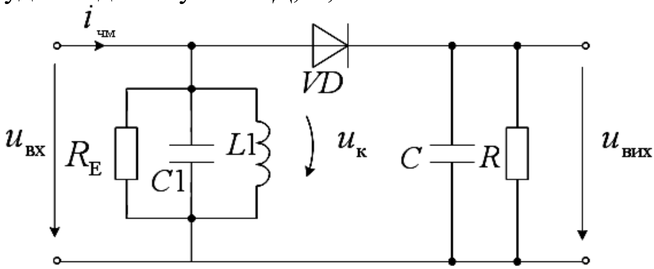


Рис. 5.12

Недоліки частотного детектора:

1) не допускається паразитна амплітудна модуляція вхідного ЧМ-сигнала, який повинен бути високоякісним;
2) недостатня лінійність схилу амплітудно-частотної характеристики фільтра викликає додаткові спотворення вихідного сигналу;
3) не допускається велика девіація частоти $\Delta\omega$.

Приклад 5.1.

Діодний детектор має параметри: $R_н$ = 18 кОм, S= 10 мА/В. Визначити коефіцієнт детектування даного пристрою.

Розв’язок.

1. Коефіцієнт детектування діодного детектора

$$K_{дет} = \frac{U_{вих}}{U_{m\ вх}} = \cos\theta$$

2. Вихідна напруга діодного детектора

$$U_{вих} = U_0 = I_0 R_н = SU_{m\ вх} R_н \gamma_0(\theta),$$

де $\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi}(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ - функція Берга нульового порядку. Тоді $$U_0 = SU_{m\,\text{вх}}R_\text{н}\frac{1}{\pi}(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

Тепер

$$K_\text{дет} = SR_\text{н}\frac{1}{\pi}(\sin\theta - \theta\cos\theta) = \cos\theta$$

Або

$$\text{tg}\theta - \theta = \frac{\pi}{SR_\text{н}}$$

В задачі $SR_\text{н} = 10\cdot 10^{-3}\cdot 18\cdot 10^{3} = 180 >> 1$. При малих значеннях θ маємо

$$\text{tg}\theta \approx \theta + \frac{\theta^3}{3}$$

Тоді

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{SR_\text{н}}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 3,14}{180}} = 0,374$$

$$K_\text{дет} = \cos\theta = \cos 0,374 = 0,93$$

Приклад 5.2.

Вольтамперна характеристика транзистора $i_\text{К} = f(U_\text{БЕ})$ у схемі колекторного детектора апроксимована кусково лінійним методом. Крутизна похилої ділянки характеристики S = 150 мА/В. На вхід детектора подається амплітудно-модульований сигнал з коефіцієнтом модуляції M = 0,5 і амплітудою $U_{m\,\text{вх}}$ =0,5 В. Визначити амплітуду вихідної напруги корисного сигнала $U_{m\,\text{вих}}$ та коефіцієнт детектування $K_\text{дет}$, якщо колекторний резистор фільтра нижніх частот має опір $R_\text{н}$ = 1 кОм.

Розв’язок

1. Корисна складова вихідної напруги при лінійному детектуванні

$$U_{m\ \text{вих}} = 0,318 S R_{\text{н}} M U_{m\ \text{вх}} = 0,318 \cdot 150 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{3} \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 11,9\ \text{В}$$

2. Коефіцієнт детектування

$$K_{\text{дет}} = \frac{U_{m\ \text{вих}}}{M U_{m\ \text{вх}}} = \frac{11,9}{0,5 \cdot 0,5} = 47,6$$

5.7. Методичні вказівки

При вивченні матеріалу глави 5 «Детектування» треба звернути увагу на наступні моменти.

1. Детектування являє собою процес, зворотній до модуляції. Але його не слід змішувати з демодуляцією. Демодуляція виникає при визначених умовах у лінійних колах і призводить до зменшення глибини модуляції. Демодуляція не пов’язана з виникненням нових частот в спектрі сигнала. Демодуляція – це не виявлення закону модуляції.

Основні види детектування зв’язані з видами модуляції: амплітудне, фазове і частотне детектування. Найбільш поширені схеми амплітудних детекторів, які застосовуються також у детекторах інших видів.

Для амплітудного детектування рекомендується обирати лінійне детектування, при якому відсутні спотворення корисного сигнала. Для інших видів амплітудного детектування для зменшення спотворення треба зважати на додаткові застереження.

Найбільш розповсюдженою схемою амплітудного детектора є діодний детектор, і якому також, як і у інших схемах для одержання неспотвореного корисного сигналу треба виконувати визначені співвідношення між параметрами низькочастотного *RC*-фільтра і параметрами сигнала.

Фазове і частотне детектування реалізується більш складними методами і схемами, які вимагають виконання додаткових умов для одержання якісного вихідного сигналу.

Задачі

5.1. У діодному колекторі використаний напівпровідниковий діод з крутизною вольтамперної характеристики S = 10 мА/В, опір резистора навантаження $R_н$ = 20 кОм. На вході детектора діє напруга $u(t) = 5(1 + 0,6\cos\Omega t)\cos\omega_0 t$, В. Знайти амплітуду сигналу низької частоти Ω, який вилучається на виході детектора.

Зазначення: для знаходження коефіцієнта детектування скористайтеся тим, що для обраних параметрів схеми безрозмірний коефіцієнт $SR_н$ >>1.

Відповідь.

$U_{m\ вих}$ =2,8 В.

5.2. В схемі діодного детектора вольтамперна характеристика діода апроксимована квадратичною параболою i = 0,05U^2 , мА на ділянці $0 \le U \le 1$ В. На вхід схеми подається амплітудно-модульований сигнал $U_{АМ}(t) = 0,4(1 + 0,6\sin\Omega t)\sin\omega_0 t$, де $\Omega = 6,28 \cdot 10^3$ рад/с, $\omega_0 = 628 \cdot 10^5$ рад/с. Розрахувати:

1. Параметри R і C, при яких буде забезпечене неспотворене відділення складової низької частоти.
2. Амплітуду низькочастотної складової $U_{m\ вих}$.

Відповідь. R = 100 кОм, C = $0,8 \cdot 10^{-9}$ Ф = 0,8 нФ = 800 пФ, $U_{m\ вих}$ =0,48 В.

5.3. Розрахувати величину ємностей C_1, C_2 фільтра, при якій виконується умова неспотвореного детектування, для опорів навантаження R_1= 9,1 кОм, R_2= 0,5 МОм. Частота модулюючого коливання на вході детектора F = 400 Гц, несуча частота f_0=500 кГц.

Відповідь: $C_1 = 1250 \cdot 10^{-12}$ Ф = 1250 пФ

$$C_2 = 11,3 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф} = 11,3\ \text{пФ}$$

5.4. На вхід квадратичного детектора подається амплітудно-модульований сигнал $u(t) = 4(1 + 0,5\cos\Omega t)\cos\omega_0 t$. Коефіцієнт апроксимації рядом Тейлора $a_2 = 3\dfrac{\text{мА}}{\text{В}^2}$. Опір резистора фільтра нижніх частот $R_\text{н}$ = 10 кОм. Знайти амплітуду корисної складової вихідної напруги $U_{m\ \text{вих}}$ частоти Ω та коефіцієнт нелінійних спотворень $K_\text{нел}$.

Відповідь. $U_{m\ \text{вих}}$ = 24 В; $K_\text{нел}$=0,125.

Питання для самоперевірки

1. Що таке детектування?
2. Які види детектування вам відомі?
3. Запишіть вираз для амплітудно-модульованого коливання.
4. Зобразьте схему колекторного детектора.
5. Які співвідношення між параметрами фільтра низьких частот і параметрами сигнала повинні виконуватись для правильної роботи амплітудного модулятора?
6. Що таке лінійне детектування?
7. Чому дорівнює коефіцієнт детектування в лінійному детекторі?
8. Що таке квадратичне детектування?
9. Який основний недолік квадратичного детектування?
10. Запишіть вираз для коефіцієнта нелінійних спотворень.
11. Чому дорівнює коефіцієнт нелінійних спотворень у квадратичному детекторі?
12. Чому дорівнює коефіцієнт детектування у квадратичному детекторі?
13. Як реалізується синхронне детектування?
14. Запишіть вираз для вихідної напруги синхронного детектора.
15. Зобразьте схему діодного детектора.
16. Чому дорівнює коефіцієнт детектування у діодному детекторі?

17. Зобразьте схему фазового детектора.
18. Назвіть недоліки фазового детектора.
19. Поясніть графічно процеси при частотному детектуванні.
20. Назвіть недоліки частотного детектора.
21. Зобразьте схему частотного детектора.

Глава 6

Генерування гармонічних коливань

6.1. Автоколивання. Загальні відомості.

В радіотехніці широко використовуються кола, на виході яких виникають гармонічні коливання без будь-якого зовнішнього впливу. Такі кола називаються автогенераторами, а коливання автоколиваннями.

В загальному випадку будь-яке автоколивальне коло складається з джерела живлення і коливальної системи (рис.6.1), між якими розташований ключ чи клапан, через який коливальна система підживлюється від джерела енергії у визначені відрізки часу.

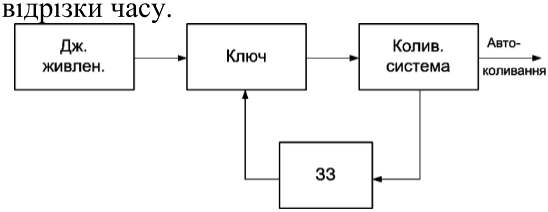


Рис. 6.1

Керування ключем здійснюється сигналами з коливальної системи по колу зворотнього зв'язку ЗЗ.

При відповідному виборі параметрів коливальної системи вона стає нестійкою. Будь-які флуктуації в елементах системи викликають гармонічні коливання зі зростаючою амплітудою. Але при збільшенні амплітуди починають виявлятись нелінійні властивості керованого елемента , наприклад, транзистора, який на рис.6.1 реалізується як ключ. При досягненні деякого рівня зростання амплітуди припиняється. Настає стаціонарний режим.

При аналізі і розрахунку автогенераторів виникають три основні задачі:

1) визначення умов самозбудження автогенераторів;

2) дослідження перехідних процесів установлення коливань;

3) визначення стаціонарних режимів (форма, амплітуда і частота автоколивань) і аналіз їх стійкості.

6.2 Виникнення коливань в автогенераторі

Розглянемо процес самозбудження автогенератора з трансформаторним зв'язком (рис.6.2).

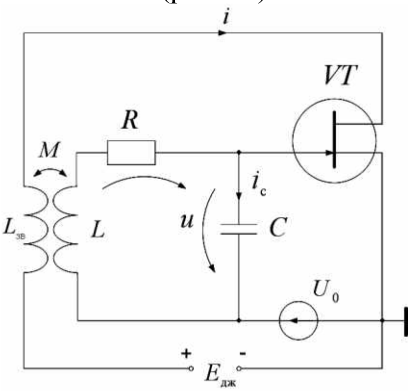


Рис. 6.2

Коливальну систему утворюють *RLC*-контур і зворотній трансформаторний зв'язок через індуктивність зв'язку $L_{зв}$. *M*-індуктивність взаємоіндукції.

Нехай в системі виникли коливання з малою амплітудою „*u*" напруга на ємності *C*, тобто і на затворі транзистора *VT*. По закону Кірхгофа для напруг (ЗКН) для позначеного на рис.6.2 контуру можна записати при практичній відсутності струму затвора польового транзистора

$$u_R + u + u_L \mp u_M = 0$$

Але

$$u_R = Ri_C,\ u_L = L\frac{di_C}{dt},\ i_C = C\frac{du}{dt},\ u_M = M\frac{di}{dt}$$

Тоді одержимо диференційне рівняння

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u=\pm M\frac{di}{dt} \qquad (6.1)$$

При малій напрузі, „*u*" робота транзистора відбувається практично на лінійній ділянці вольтамперної характеристики транзистора $i=f(u)$ (рис.6.3).

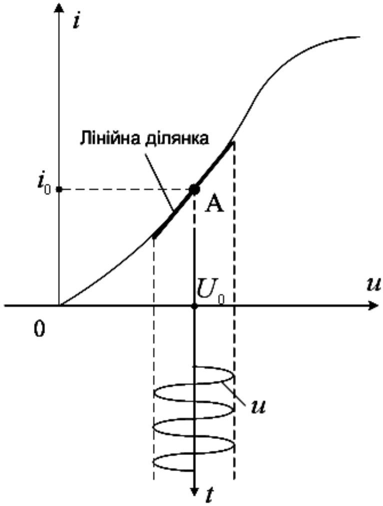


Рис. 6.3

Тоді струм стока транзистора „*i*" лінійно залежить від напруги „*u*".

$$i=i_0+S_{\text{диф}}u \qquad (6.2)$$

де i_0 - постійна складова струму, яка визначається зміщенням U_0;

$S_{\text{диф}}$ - диференційна крутизна вольтамперної характеристики у робочій точці А.

Тоді з (6.1), (6.2) одержимо

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} \mp MS_{\text{диф}}\frac{du}{dt} + u = 0$$

Або

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (\frac{R}{L} \mp \frac{MS_{\text{диф}}}{LC})\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0\,, \qquad (6.3)$$

де $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ - частота власних коливань контуру без втрат.

При знаку „-” в системі виникає режим регенерації. Якщо

$$\frac{R}{L} - \frac{MS_{\text{диф}}}{LC} = 0$$

тобто при

$$M = M_{\text{кр}} = \frac{RC}{S_{\text{диф}}} = \frac{1}{\omega Q S_{\text{диф}}} \qquad (6.4)$$

де $Q = \dfrac{\rho}{R} = \dfrac{1}{\omega_0 CR}$ - добротність контуру, в контурі виникає критичний режим, при якому диференційне рівняння (6.3) відповідає ідеальному коливальному коливальному контуру

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 \qquad (6.5)$$

При $M > M_{\text{кр}}$ система стає нестійкою і коливання зростають.

Позначимо

$$\alpha = \frac{1}{2}(\frac{MS_{диф}}{LC} - \frac{R}{L}) > 0 \qquad (6.6)$$

Тоді диференційне рівняння (6.3) набуває наступний вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 2\alpha\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \qquad (6.7)$$

Розв'язок цього рівняння

$$u(t) = Ae^{\alpha t}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\,t + \varphi)\,, \qquad (6.8)$$

де A- стала інтегрування, φ- початкова фаза гармонічних коливань.

Розв'язок (6.8) описує коливання, амплітуда якого зростає по експоненті (рис.6.4)

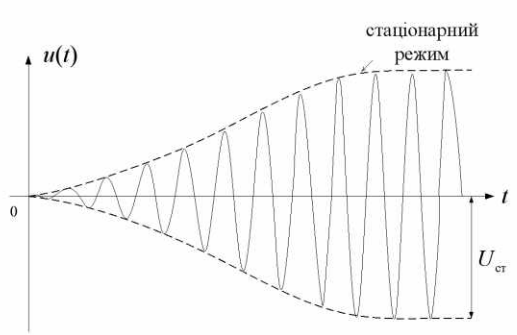


Рис. 6.4

Звичайно $\alpha << \omega_0$ і частота коливань у (6.8) близька до резонансної частоти контуру ω_0.

У рівнянні (6.3) був обраний знак „-". Зворотній зв'язок при цьому зветься позитивним.

6.3. Умови самозбудження автогенератора

Автогенератор зручно аналізувати, якщо представити його у вигляді підсилювача без зовнішнього впливу з позитивним зворотним зв’язком (рис.6.5)

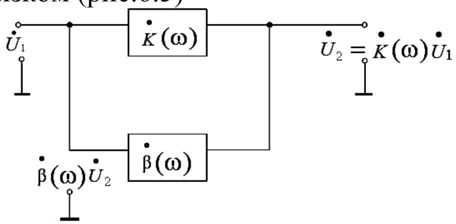


Рис. 6.5

Комплексний коефіцієнт передачі підсилювача

$$\dot{K}(\omega) = K(\omega)e^{j\varphi_K(\omega)} \qquad (6.9)$$

комплексний коефіцієнт передачі кола зворотнього зв’язку

$$\dot{\beta}(\omega) = \beta(\omega)e^{j\varphi_\beta(\omega)} \qquad (6.10)$$

Щоб коливання з амплітудою U_1 на вході підтримувалось незмінним, необхідно після обходу контуру подати на вхід такий же вхідний сигнал, тобто

$$\dot{\beta}(\omega)\dot{U}_2 = \dot{\beta}(\omega)\dot{K}(\omega)\dot{U}_1 = \dot{U}_1$$

Звідки

$$\dot{\beta}(\omega)\dot{K}(\omega) = 1 \qquad (6.11)$$

Співвідношення (6.11) називається умовою балансу фаз і амплітуд, при якій в системі підтримуються незатухаючі коливання.
Вираз (6.11) дає дві умови підтримання незатухаючих коливань

$$\beta(\omega)K(\omega) = 1 \qquad (6.12)$$

$$\varphi_\beta(\omega_0) + \varphi_k(\omega_0) = 2\pi k,\ k = 0, 1, 2, ... \qquad (6.13)$$

Умова (6.12) зветься **умовою балансу амплітуд**: при стаціонарній амплітуді коливань $U_{\text{ст}}$ повний коефіцієнт підсилення на частоті генерації ω_0 при обході контуру, який складається з підсилювача і кола зворотнього зв'язку, дорівнює одиниці.

З умови балансу амплітуд розраховується амплітуда коливань у стаціонарному режимі.

Умова (6.13) зветься **умовою балансу фаз**: у стаціонарному режимі автоколивань повний зсув фаз по контуру, який складається з підсилювача і кола зворотнього зв'язку, дорівнює, або кратний 2π.

З умови балансу фаз розраховується частота коливань у стаціонарному режимі ω_0.

Якщо $M < M_{\text{кр}}$, то $\beta k < 1$ і амплітуда коливань зменшується, якщо $M > M_{\text{кр}}$, то $\beta k > 1$ і амплітуда коливань зростає.

6.4. Перехідний процес установлення коливань в автогенераторі

При зростанні амплітуди автоколивань необхідно враховувати нелінійність вольтамперної характеристики транзистора. Тоді рівняння (6.3) стає нелінійним диференційним рівнянням. Лінійна залежність (6.2) стає нелінійною вольтамперною характеристикою $i = f(u)$. Для неї

$$\frac{di}{dt} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dt} \qquad (6.14)$$

Підставимо (6.14) в рівняння (6.3). Одержимо при позитивному зворотньому зв'язку

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\left[\frac{R}{L}-\frac{M}{LC}\frac{df(u)}{du}\right]\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0 \qquad (6.15)$$

Знайдемо наближений розв'язок цього рівняння, вважаючи, що навантаженням генератора є високодобротний коливальний контур, настроєний на частоту ω_0. Тоді розв'язок рівняння (6.15) можна записати у вигляді

$$u(t)=U(t)\cos\omega_0 t\,, \qquad (6.16)$$

де $U(t)$- амплітуда-функція, що повільно змінюється у порівнянні з $\cos\omega_0 t$.

Знайдемо похідні

$$\frac{du}{dt}=\frac{dU(t)}{dt}\cos\omega_0 t-U(t)\omega_0\sin\omega_0 t\approx-\omega_0 U(t)\sin\omega_0 t$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d^2U(t)}{dt^2}\cos\omega_0 t-\omega_0\frac{dU(t)}{dt}\sin\omega_0 t-\omega_0\frac{dU(t)}{dt}\sin\omega_0 t-$$
$$-\omega_0^2U(t)\cos\omega_0 t\approx-2\omega_0\frac{dU(t)}{dt}\sin\omega_0 t-\omega_0^2U(t)\cos\omega_0 t$$

Підставимо похідні в рівняння (6.15). Одержимо після елементарних перетворень

$$\frac{dU(t)}{dt}+\frac{1}{2}\left[\frac{R}{L}-\frac{M}{LC}\frac{df(u)}{du}\right]U(t)=0 \qquad (6.17)$$

Це рівняння першого порядку. Отже розв'язок його спрощується.

Розглянемо розв'язок рівняння (6.17)

Струм транзистора $f(u)=i(u)$ є періодичною функцією

$$i(t) = I_0 + I_1 \cos \omega_0 t + I_2 \cos 2\omega_0 t + ...$$

Високодобротний коливальний контур виділяє тільки складову першої гармоніки ω_0 по виразу (6.16). Тоді

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{df(u)dt}{dtdu} = \frac{-\omega_0 I_1 \sin \omega_0 t}{-\omega_0 U(t) \sin \omega_0 t} = \frac{I_1}{U(t)} = S_1(U) \quad (6.18)$$

Тут $S_1(U)$ - крутизна характеристики транзистора.

Підставимо (6.18) у рівняння (6.17). Одержимо

$$\frac{dU(t)}{dt} + \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} S_1(U)\right] U = 0 \qquad (6.19)$$

При степеневій апроксимації нелінійного елемента перша гармоніка струму по (2.23)

$$I_1(U) = a_1 U + \frac{3}{4} a_3 U^3 + \frac{5}{8} a_5 U^5 + ...$$

Обмежуючись двома першими доданками, одержимо по (6.18)

$$S_1(U) = \frac{I_1(U)}{U} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 U^2 \qquad (6.20)$$

Підставимо вираз (6.20) у рівнянні (6.19). Одержимо

$$\frac{dU(t)}{dt} + \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} - \frac{a_1 M}{LC} - \frac{3a_3 M}{4LC} U^2(t)\right] U(t) = 0 \qquad (6.21)$$

Позначимо

$$\alpha = \frac{1}{2}(\frac{a_1 M}{LC} - \frac{R}{L}) > 0,\ \beta = \frac{3a_3 M}{8LC} < 0 \qquad (6.22)$$

Тоді рівняння (6.21) має вигляд

$$\frac{dU(t)}{dt} - \left[\alpha + \beta U^2(t)\right] U(t) = 0 \qquad (6.23)$$

Розглянемо похідну

$$\frac{d\left[U(t)\right]^2}{dt} = 2\frac{dU(t)}{dt}U(t)$$

Тоді з (6.23) одержимо

$$\frac{d\left[U(t)\right]^2}{dt} = 2\left[\alpha + \beta U^2(t)\right] U^2(t) \qquad (6.24)$$

Позначимо $U^2(t) = x$. Одержимо з (6.24)

$$\frac{dx}{2(\alpha + \beta x)x} = dt \qquad (6.25)$$

Розкладаючи ліву частину виразу (6.25) на прості дроби, одержимо

$$\frac{dx}{2(\alpha + \beta x)x} = -\frac{\beta}{2\alpha(\alpha + \beta x)}dx + \frac{1}{2\alpha x}dx = dt \qquad (6.26)$$

Після інтегрування

$$\frac{1}{2\alpha}\ln\frac{x}{\alpha + \beta x} + C = t \qquad (6.27)$$

Якщо при $t=0$ $x=x_0$, то стала інтегрування „C”

$$C=-\frac{1}{2\alpha}\ln\frac{x_0}{\alpha+\beta x_0}$$

Підставляючи в (6.27), одержимо

$$x(t)=\frac{\alpha x_0 e^{2\alpha t}}{\alpha+\beta x_0-\beta x_0 e^{2\alpha t}} \qquad (6.28)$$

Повернемось до позначення $U^2(t)=x$. Тоді з (6.28)

$$U(t)=\frac{U_0\sqrt{\alpha}e^{\alpha t}}{\sqrt{\alpha+\beta U_0^2-\beta U_0^2 e^{2\alpha t}}} \qquad (6.29)$$

U(t)- є амплітудою коливань в режимі великого сигналу.

6.5. Режими самозбудження автогенератора

Розглянемо вольтамперну характеристику $i=f(u)$ нелінійного елемента (рис.6.6).

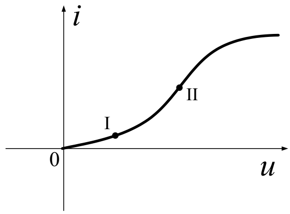


Рис. 6.6

Робоча точка може бути розташована в положеннях I чи II. Відповідні характеристики залежності крутизни характеристики транзистора $S_1(U)$ в залежності від амплітуди автоколивань зображені на рис.6.7. При положенні робочої точки I і зростанні амплітуди коливань крутизна $S_1(U)$ спочатку зростає, а потім зменшується. З графіка I рис.6.7. видно, що при крутизні $S_1(U)=\dfrac{RC}{M}$ можливі два стаціонарних режими з амплітудами коливань $U_{\text{ст}1}$ і $U_{\text{ст}2}$.

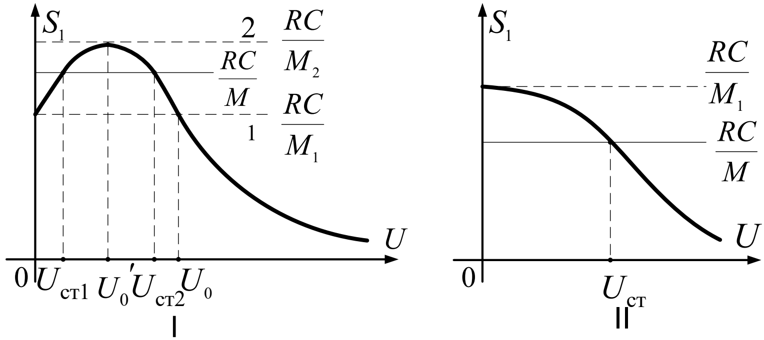


Рис. 6.7

Для характеристики стаціонарного режиму використовується поняття стійкості: стаціонарний режим автоколивань вважається стійким, якщо при малих відхиленнях амплітуди від стаціонарної величини $U_{ст}$ система намагається знову повернутися до попереднього стану з тою ж амплітудою $U_{ст}$. Для режиму з $U_{ст1}$ при будь-яких відхиленнях амплітуди від стаціонарного ці відхилення будуть зростати з причини додатнього зворотнього зв'язку, тобто повернення у попередній стан неможливе. Режим, при якому система стає нестійкою, зветься жорстким режимом.

Автогенератор при жорсткому режимі також здатний до самозбудження. Для цього треба, щоб $M = M_1$, коли умови самозбудження виконуються. При $M = M_1$ навіть невеликі флуктуаційні коливання за рахунок високої крутизни характеристики починають зростати. Зростає і крутизна характеристики. Після максимальної крутизни при $U_0^/$ крутизна починає зменшуватись, а амплітуда зростає до стаціонарного значення U_0. Якщо при U_0 почати зменшувати M, то амплітуда автоколивань буде плавно зменшуватись до $U_0^/$ при $M < M_2$ коли коливання зриваються – амплітуда миттєво спадає до нуля (рис.6.7, I).

Отже при жорсткому режимі самозбудження коливання виникають при $M = M_1$, а зникають при $M = M_2 < M_1$.

Залежність амплітуди автоколивань від взаємоіндуктивності *M* наведена на рис.6.8, I.

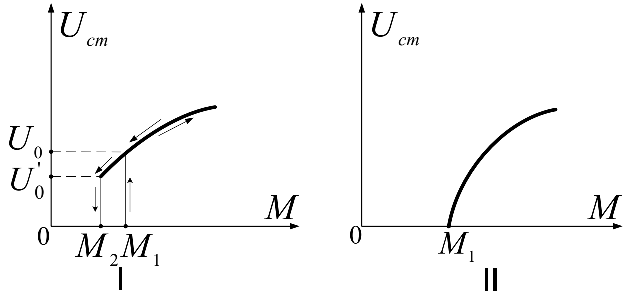


Рис. 6.8

Видно, що графік має форму петлі, а властивість системи зветься коливальним гістерезісом. При положенні робочої точки II (рис. 6.6, 6.7, II) система стійка. З графіка видно, що при амплітуді автоколивань $U_{ст}$ будь-яка зміна амплітуди викликає при від'ємному зворотньому зв'язку повернення робочої точки у попереднє положення. Самозбудження генератора з'являється при коефіцієнті взаємоіндукції $M = M_2$ і при подальшому зростанні *M* напруга автоколивань плавно зростає. Режим, при якому система є стійкою, зветься м'яким режимом самозбудження. При м'якому режимі самозбудження коливальний гістерезіс не виникає (рис. 6.8, II). При зменшенні *M* точки, що відповідають стаціонарним режимам, розташовані на тій же кривій.

6.6. Стаціонарний режим роботи автогенератора

При $t \to \infty$ амплітуда $U(t)$ у виразі (6.29) прямує до стаціонарного постійного рівня

$$U_{ст} = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \qquad (6.34)$$

Підставимо значення з (6.22). Одержимо

$$U_{CT} = \sqrt{\frac{\frac{RC}{M} - a_1}{\frac{3}{4}a_3}} \qquad (6.35)$$

Раніше була розглянута кубічна апроксимація вольтамперної характеристики транзистора, при якій крутизна характеристики $S_1(U)$ записується по виразу (6.20). З нього видно, що в м'якому режимі при зростанні $U_{ст}$ крутизна S_1 повинна зменшуватись, тобто коефіцієнт a_3 повинен бути від'ємним ($a_3<0$). У жорсткому режимі $a_3>0$.

Знайдемо a_3 графічно, виходячи зі співвідношення

$$a_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3 i(u)}{du^3} \qquad (6.36)$$

На рис. 6.9,а показана типова характеристика польового транзистора *i(u)*.

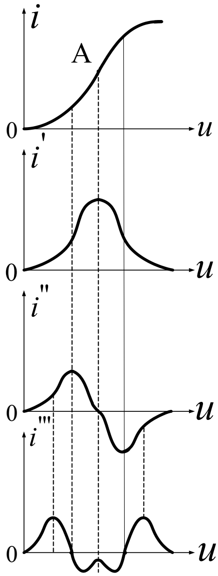


Рис. 6.9

Виконаємо трикратне графічне диференціювання (рис.6.9,б,в,г,). З графіка $i'''(u)$ видно, що при малих відхиленнях напруги „u” від робочої точки А в середній частині характеристики похідна $i'''(u)$ від ємна. В цьому діапазоні реалізується м’який режим роботи.

6.7. Автогенератори з трьохточкою.

Розглянемо схему автогенератора з індуктивною трьохточкою (генератор Хартлі) (рис.6.10,а).
Резистор R враховує всі види втрат в систе-
Рис. 6.9 мі: неідеальнісь реактивних елементів, кінцевий вхідний опір польового транзистора, вплив зовнішніх кіл (навантажень).

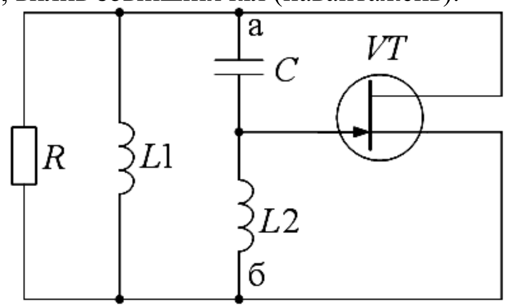


Рис. 6.10, а

Визначимо умови самозбудження схеми. Розглянемо еквівалентну схему генератора (рис.6.10,б).

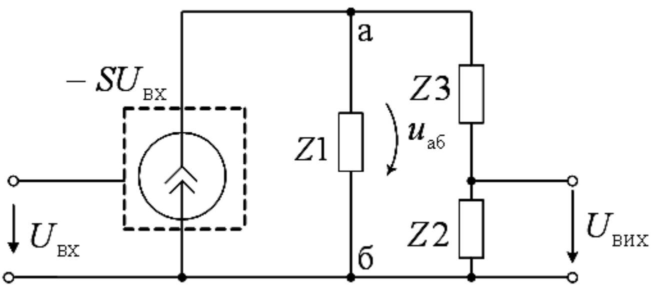


Рис. 6.10, б

Тут $U_{вх}$, $U_{вих}$ - операторні вхідна і вихідна напруги схеми без зворотнього зв’язку. Знайдемо передаточну функцію

$K(p)=\dfrac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}}$. На рис.6.10,б польовий транзистор VT замінений джерелом струму „ $-S_{\text{ДИФ}}U_{\text{ВХ}}$ ”. Напруга на контурі

$$U_{ab}=\frac{-S_{\text{диф}}U_{\text{вх}}\text{Z}1(\text{Z}2+\text{Z}3)}{\text{Z}1+\text{Z}2+\text{Z}3}$$

Вихідна напруга

$$U_{\text{вих}}=\frac{U_{a\text{б}}Z2}{Z1+Z3}=\frac{-S_{\text{диф}}Z1Z2U_{\text{вх}}}{Z1+Z2+Z3} \qquad (6.37)$$

При замкненому колі зворотнього зв’язку одержимо

$$U_{\text{вих}}=K(p)\beta(p)U_{\text{вих}}$$

Звідки

$$\left[1-\beta(p)K(p)\right]U_{\text{вих}}=0$$

Або

$$1-\beta(p)K(p)=0$$

При коефіцієнті зворотнього зв’язку $\beta(p)=0$ одержимо

$$K(p)=1$$

Отже з (6.37), (6.38) маємо

$$\frac{S_{\text{диф}}Z1Z2}{Z1+Z2+Z3}=1 \qquad (6.39)$$

де

$$Z1 = \frac{pL1R}{pL1 + R}, Z2 = pL2, Z3 = \frac{1}{pC} \qquad (6.40)$$

Підставимо (6.40) у (6.39), одержимо характеристичне рівняння замкненої системи

$$(S_{\text{диф}} + \frac{1}{R})L1L2Cp^3 + (L1 + L2)Cp^2 + \frac{L1}{R}p + 1 = 0 \quad (6.41)$$

Умовою нестабільної системи, коли виникають коливання, є від'ємний визначник Гурвіца

$$D = \begin{vmatrix} (L1 + L2)C & 1 \\ (S_{\text{диф}} + \frac{1}{R})L1L2C & \frac{L1}{R} \end{vmatrix} < 0$$

Звідки

$$L2(S_{\text{диф}} + \frac{1}{R}) > \frac{L1 + L2}{R}$$

Тобто умова самозбудження генератора

$$RS_{\text{диф}} > \frac{L2}{R} \qquad (6.42)$$

Частота власних коливань генератора визначається коренями характеристичного рівняння (6.41)

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{(L1 + L2)C}} \qquad (6.43)$$

На резонансній частоті опір дійсний.

$$Z_{\text{аб}} = Z_{\text{рез}} = \frac{Z1(Z2+Z3)}{Z1+Z2+Z3}$$

Комплексна амплітуда на контурі при резонанса

$$\dot{U}_{ab} = -S_{\text{диф}}\dot{U}_{\text{вх}}Z_{\text{рез}}$$

Вихідна напруга

$$\dot{U}_{\text{вих}} = -\frac{L1}{L2}\dot{U}_{ab} = \frac{L2S_{\text{диф}}\dot{U}_{\text{вх}}Z_{\text{рез}}}{L1} \qquad (6.44)$$

Видно, що вхідна і вихідна напруги співпадають по фазі тобто при виконанні умови (6.42) генератор самозбуджується.

Другим варіантом генератора такого типу є ємнісна трьох точка (рис.6.11) (генератор Колпітца).

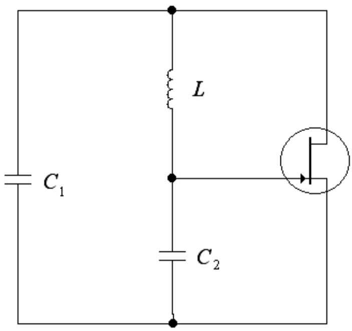


Рис. 6.11

Аналіз його виконується аналогічно.

Приклад 6.1.

В автогенераторі використаний активний елемент з середньою крутизною $S_1(U) = a_1 + \frac{3}{4}a_3U^2$, де $a_1 = S_{\text{диф}} = 15\,\frac{\text{мА}}{\text{В}}$,

$a_3 = -4\,\dfrac{\text{мА}}{\text{В}^2}$. Автогенератор має параметри: $\omega_0 = 10^7\,\text{с}^{-1}$, Q =30, M =1 мкГн. Знайти стаціонарну амплітуду автоколивань.

Розв'язок.

1. З рівняння (6.32) в стаціонарному режимі

$$S_1(U_{\text{ст}}) = \frac{RC}{M} = \frac{1}{\omega_0 QM} = \frac{1}{10^7 \cdot 30 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 3,33\ \frac{\text{мА}}{\text{В}}$$

2. Тепер з рівняння

$$S_1(U_{\text{ст}}) = a_1 + \frac{3}{4} a_3 U_{\text{ст}}^2$$

одержимо

$$U_{\text{ст}} = 2\sqrt{\frac{S_1(U_{\text{ст}}) - a_1}{3a_3}} = 2\sqrt{\frac{3,33 \cdot 10^{-3} - 15 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot (-4) \cdot 10^{-3}}} = 1,97\ \text{В}$$

Приклад 6.2.

Характеристика транзистора апроксимована двома відрізками прямих (рис. 6.12).

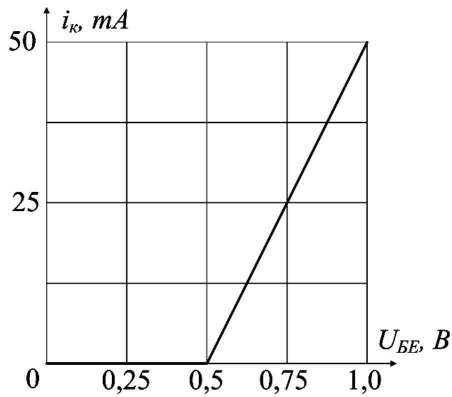


Рис. 6.12

Побудувати графік залежності середньої крутизни $S(U)$ від амплітуди високочастотної напруги. Прийняти напругу зміщення U_0 = 0,75 В.

Розв’язок.

1. При розкладнні в ряд Фурьє для одержання середньої крутизни характеристики обмежимось постійною складовою та першою гармонікою струму $i(u) = I_0 + I_1 \cos \omega_0 t$.

Високочастотна напруга $u(t) = U \cos \omega_0 t$

2. Середня крутизна характеристики

$$\frac{di(u)}{du} = \frac{\dfrac{di(u)}{dt}}{\dfrac{du}{dt}} = \frac{-I_1 \omega_0 \sin \omega_0 t}{-U \omega_0 \sin \omega_0 t} = \frac{I}{U} = S_1(U)$$

3. При кусково-лінійній апроксимації перша гармоніка $I_1 = S(U) U_m \gamma_1(\theta)$

4. Кут відсічки θ знаходимо із співвідношення

$$\cos\theta = \frac{U_\text{п} - U_0}{U_m} = \frac{0,5 - 0,75}{U_m} = -\frac{0,25}{U_m}$$

Тут $U_\text{п}$ = 0,5 В (рис. 6.12)

Звідси $\theta = \arccos(-\dfrac{0,25}{U_m})$

5. Струм першої гармоніки

$I_1 = S U_m \gamma_1(\theta)$,

де $\gamma_1(\theta) = \dfrac{1}{\pi}(\theta - \sin\theta\cos\theta)$ - функція Берга першого порядку.

6. Середня крутизна характеристики

$$S_1(U) = \frac{I_1}{U_m} = S\gamma_1(\theta) = S\gamma_1\left[\arccos(-\frac{0,25}{U_m})\right]$$

Тут S – крутизна характеристики транзистора по рис. 6.12 на похилій ділянці. Видно, що S = 100 мА/В

Тобто одержуємо залежність

$$S_1(U) = 100\gamma_1\left[\arccos(-\frac{0,25}{U_m})\right]$$

Виконаємо обчислення θ, $\gamma_1(\theta)$ та $S_1(U)$ при різних значеннях U_m. Результати розрахунку зведені в таблицю 6.1.

Табл. 6.1

Um, B	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75
S1(U), mA/B	100	80,5	71,3	66,2	63,1	61,7	60,0

По таблиці будуємо графік залежності $S_1(U)$ (рис. 6.13)

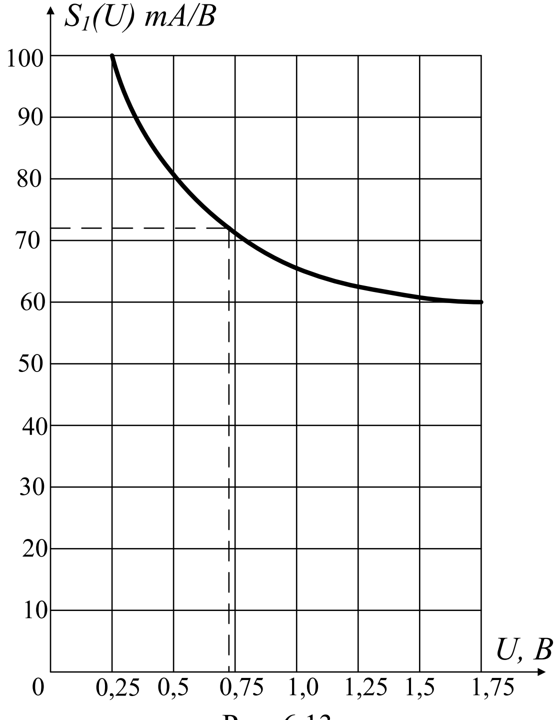


Рис. 6.13

Приклад 6.3.

Автогенератор гармонічних коливань зібраний по схемі рис. 6.2. Використаний транзистор з характеристикою в прикладі 6.2.

Параметри автогенератора: $\omega_0 = 10^6\,\text{с}^{-1}$, Q =70, M =0,2 мкГн. Визначити амплітуду коливань.

Розв’язок.
1. Середня крутизна характеристики

$$S_1(U) = \frac{1}{\omega_0 QM} = \frac{1}{10^6 \cdot 70 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}} = 71,4 \text{ мА/В}.$$

2. По графіку рис. 6.13. знаходимо U_m =0,725 В.

6.8. Методичні вказівки

Розділ „Генерування автоколивань” є одним із основних розділів курсу. Нелінійним елементом в автоколивальній системі є електронний ключ або клапан, через який коливальна система одержує енергію від джерела живлення для підтримання коливань. Керування процесом передачі цієї енергії виконує коло зворотнього зв’язку. Основні задачі аналізу автогенераторів це визначення умов самозбудження і розрахунок амплітуди і частоти автоколивань. Виникнення коливань описується лінійним диференційним рівнянням при малій амплітуді. Умови самозбудження автогенератора включають баланс амплітуд, коли загальний коефіцієнт підсилення по колу зі зворотнім зв’язком дорівнює одиниці, і баланс фаз, коли фаза коливань у цьому колі дорівнює нулю.

Коли амплітуда коливань зростає, починають виявлятися нелінійні властивості електронного ключа і диференційне рівняння, що описує процеси в цьому режимі, стає нелінійним. При цьому для спрощення аналізу розглядають диференційне рівняння першого порядку, в результаті чого визначається амплітуда коливань в стаціонарному режимі. Стаціонарний стан виникає в результаті жорсткого і м’якого режимів самозбудження. Стійкий режим виникає при м’якому режимі самозбудження, нестійкий-при жорсткому. Такі режими самозбудження обумовлюються положенням робочої точки на вольт амперній характеристиці електронного елемента і характером зміни її крутизни.

В цьому розділі розглянуті також генератори з трьохточкою (індуктивною і ємнісною) – генератори Хартлі і Колпітца. Аналіз генераторів базується на загальних умовах балансу фаз і амплітуд. Це дозволяє визначити параметри елементів генератора і виконати їх розрахунок.

Задачі

6.1. В автогенераторі з трансформаторним зв'язком використаний електронний пристрій, у якого залежність середньої крутизни S_1 (мА/В) від керуючої напруги U (В) апроксимована поліномом 2-ї степені $S_1(U) = a_1 + \frac{3}{4}a_3U^2$, де $a_1 = 1\ \frac{\text{мА}}{\text{В}}$, $a_3 = -2,5\ \frac{\text{мА}}{\text{В}^2}$. Коливальний контур генератора має параметри: $\omega_0 = 6\cdot 10^8$ с$^{-1}$, Q =25. Визначте, при якому мінімальному значенні коефіцієнта взаємоіндукції $M_{\min}$ в системі виникають автоколивання. Підрахуйте амплітуду $U_{\text{ст}}$ у стаціонарному режимі, якщо $M = 3M_{\min}$. Проаналізуйте, як залежить стаціонарна амплітуда автоколивань від добротності коливального контура.

Відповідь: $M_{\min}$ =0,067 мкГн, $U_{\text{ст зм}}$ = 0,6 В.

З рівнянь $S_1(U) = a_1 + \frac{3}{4}a_3U^2$ та $S_1(U) = \frac{1}{\omega_0 QM}$ одержуємо залежність $U_{\text{ст}}$ від Q

$U_{\text{ст}} = 2\sqrt{\dfrac{\frac{1}{\omega_0 QM} - a_1}{3a_2}}$. При $M = 3M_{\min}$ =0,2 мкГн одержуємо $U_{\text{ст}} = 0,729\sqrt{1 - 8,353\frac{1}{Q}}$. При $Q \le 8,353$ коливання неможливі. При Q>8,353 коливання починаються з мінімальної амплітуди. При зростанні Q амплітуда стаціонарних коливань зростає. При

Q = 25 $U_{\text{ст}}$ = 0,6 В. Подальше зростання $U_{\text{ст}}$ з ростом Q уповільнюється. При Q = 80 – 100 амплітуда досягає величини 0,69 – 0,698 тобто практично максимальної величини 0,729 В.

6.2. В автогенераторі з трансформаторним зв'язком (рис.6.2) коливальний контур настроєний на частоту $f_{\text{рез}}$ = 400 кГц. Параметри контура: L=15мкГн, R=8 Ом. Диференційна крутизна характеристики транзистора $S_{\text{диф}}$=1,5 мА/В. Визначити практичне значення коефіцієнта взаємоіндукції M, що забезпечує умови самозбудження.
Відповідь: M = 56,3 мкГн.

6.3. В автогенераторі по задачі 6.1. напруга зміщення обрана рівною 0,25 В. Доведіть, що автогенератор буде працювати в жорсткому режимі самозбудження.
Відповідь:
Середня крутизна характеристики транзистора

$$S_1(U) = \frac{I_1}{U_m} = S\gamma_1(\theta) = S\gamma_1\left[\arccos\left(\frac{U_{\text{п}} - U_0}{U_m}\right)\right] =$$

$$= S\gamma_1\left[\arccos\left(\frac{0,5 - 0,25}{U_m}\right)\right] = S\gamma_1\left[\arccos\left(\frac{0,25}{U_m}\right)\right].$$

При зростанні U_m $\cos\theta$ зменшується і кут θ збільшується, функція Берга $\gamma_1(\theta)$ збільшується і крутизна $S_1(U)$ зростає. Тобто в схемі діє додатній зворотній зв'язок, що є ознакою жорсткого режиму самозбудження.

6.4. Трьохточковий автогенератор має коливальний контур, настроєний на частоту $\omega_{\text{рез}} = 6 \cdot 10^6$ с$^{-1}$. Диференційна крутизна похідної характеристики електронного пристрою у робочій точці $S_{\text{диф}}$=7 мА/В. Добротність контура Q = 40, ємність конденсатора C = 400 пФ. Знайти значення індуктивностей L_1, L_2, які забезпечують впевнене самозбудження автогенератора.

Відповідь.
Схема автогенератора відповідає рис. 6.10,а. В цій схемі роль шунтуючого резистора втрат R виконує резонансний опір контура $R_{\text{рез}}$. Заокруглення дає $L_1 = 68{,}7$ мкГн, $L_2 = 0{,}7$ мкГн.

Питання для самоперевірки

1. Що таке автогенератор?
2. Які задачі виникають при аналізі і розрахунку автогенератора?
3. Запишіть диференційне рівняння автогенератора з трансформаторним зв'язком при малій амплітуді автоколивань.
4. Запишіть вираз для напруги у коливальному контурі при зростанні у часі амплітуди автоколивань
5. Сформулюйте умови самозбудження автогенератора.
6. Який вигляд має диференційне рівняння для автогенератора при великому вхідному сигналі?
7. Зобразьте схему автогенератора з трансформаторним зв'язком на польовому транзисторі.
8. Зобразьте графічну залежність крутизни вольтамперної характеристики транзистора при жорсткому і м'якому режимах самозбудження.
9. Що таке „коливальний гістерезіс", поясніть графічно.
10. Зобразьте схеми генераторів з індуктивною і ємнісною трьохточкою.

Глава 7
RC - генератори гармонічних коливань

Розглянуті схеми *LC* – генераторів виявляються малопридатними для генерування низькочастотних коливань (нижче десятків кілогерц) оскільки на таких частотах індуктивні котушки і конденсатори стають занадто великими, контури - низькодобротними і практично не перестроюються по діапазону. На цих частотах використовують *RC* – автогенератори.

7.1. Генератор з мостом Віна

Розглянемо схему *RC* – генератора на операційному підсилювачі з мостом Віна у колі зворотнього зв'язку (рис. 7.1).

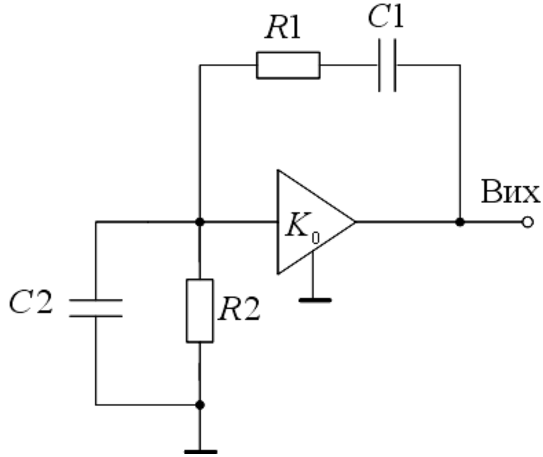


Рис. 7.1

Коло зворотнього зв'язку (мост Віна) зображений на рис.7.2.

Одержимо умови самозбудження автогенератора.

Передаточна функція кола зворотнього зв'язку по рис.7.2

$$\beta(p)=\frac{\dfrac{R2\dfrac{1}{pC2}}{R2+\dfrac{1}{pC2}}}{R1+\dfrac{1}{pC1}+\dfrac{R2\dfrac{1}{pC2}}{R2+\dfrac{1}{pC2}}}= \tag{7.1}$$

$$=\frac{pR2C1}{(1+pR1C1)(1+pR2C2)+pR2C1}=\frac{p\tau'}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)+p\tau'}$$

Тут: $\tau_1 = R1C1, \tau_2 = R2C2, \tau' = R2C1$

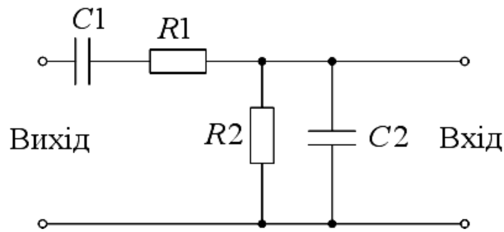


Рис. 7.2

Умова виникнення коливань аналогічно (6.11)

$$K_0\beta(p)=1,$$

де K_0 - коефіцієнт передачі операційного підсилювача.

З урахуванням (7.1) одержимо

$$\frac{K_0 p\tau'}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)+p\tau'}=1$$

Звідси характеристичне рівняння

$$\tau_1\tau_2 p^2 + \left[\tau_1 + \tau_2 - (K_0 - 1)\tau'\right]p + 1 = 0 \qquad (7.2)$$

Позначимо $\qquad \tau_1\tau_2 = a, \tau_1 + \tau_2 - (K_0 - 1)\tau_1 = b$

Тоді характеристичне рівняння

$$ap^2 + bp + 1 = 0$$

Його корені

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Якщо $b < 0$, то корені $p_{1,2}$ будуть мати додатну дійсну частину і система буде нестійкою. Тому умова самозбудження генератора

$$b = \tau_1 + \tau_2 - (K_0 - 1)\tau' < 0 \qquad (7.3)$$

Звідси необхідний коефіцієнт передачі підсилювача

$$K_0 > 1 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau'} = 1 + \frac{R1C1 + R2C2}{R2C1} \qquad (7.4)$$

При $R1 = R2 = R, C1 = C2 = C$ одержимо

$$K_0 > 3 \qquad (7.5)$$

Уявна части коренів $p_{1,2}$ визначає частоту коливань генератора. Для визначення частоти генерації приймемо, що генератор працює на межі самозбудження ($K_0 = 3, b = 0$). Тоді з (7.2) характеристичне рівняння

$$\tau_1\tau_2 p^2 + 1 = 0$$

Частота генерації

$$\omega_г = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} = \frac{1}{\sqrt{R1R2C1C2}} \qquad (7.6)$$

При $R1 = R2 = R, C1 = C2 = C$

$$\omega_г = \frac{1}{RC} \qquad (7.7)$$

Розглянемо послаблення сигнала кола зворотнього зв'язку. З виразу (7.1) при заміні „p" на „ $j\omega$ " і при $R1 = R2 = R, C1 = C2 = C$ одержимо модуль коефіцієнта передачі кола зворотного зв'язку

$$|\dot{\beta}| = \beta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + (\omega RC - \frac{1}{\omega RC})^2}} \qquad (7.8)$$

Це амплітудно-частотна характеристика моста Віна.

Фазочастотна характеристика

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}(\omega RC - \frac{1}{\omega RC}) \qquad (7.9)$$

Графіки $\beta(\omega), \varphi(\omega)$ наведені на рис. 7.3.

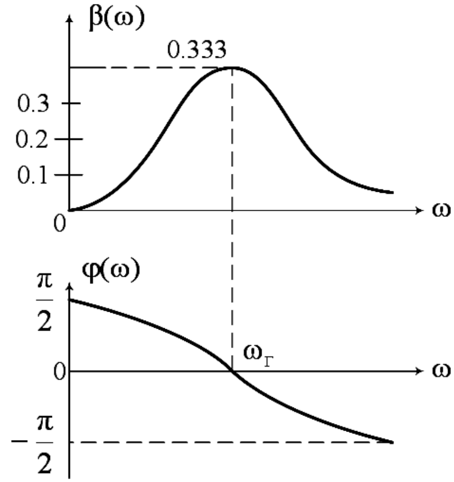


Рис. 7.3

З графіків видно, що коефіцієнт зворотнього зв’язку на частоті генерації $\beta(\omega_г) = 0.333$. Тобто добротність такого вибіркового кола невелика. Навіть на частоті генерації сигнал на виході моста Віна менше вхідного. Отже частотна вибірковість цього кола створюється лише за рахунок більшого затухання сигналу на решті частот у порівнянні з частотою генерації. Такі кола називають квазірезонансними.

7.2. Генератор з трьохланковим RC-колом

Розглянемо схему автогенератора з трьохточковим *RC*-колом у зворотному зв’язку (рис.7.4.).

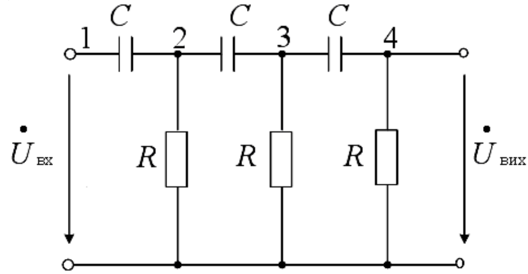


Рис. 7.4

Це фазобалансне коло. Складемо матрицю вузлових провідностей для вузлів 1-4.
Коефіцієнт передачі по напрузі

$$\beta(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВИХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{11}}$$

$$Y = \begin{vmatrix} j\omega C & -j\omega C & 0 & 0 \\ -j\omega C & 2j\omega C + \dfrac{1}{R} & -j\omega C & 0 \\ 0 & -j\omega C & 2j\omega C + \dfrac{1}{R} & -j\omega C \\ 0 & 0 & -j\omega C & j\omega C + \dfrac{1}{R} \end{vmatrix}, \quad (7.10)$$

де:

$$\Delta_{41} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -j\omega C & 2j\omega C + \dfrac{1}{R} & -j\omega C \\ 0 & -j\omega C & 2j\omega C + \dfrac{1}{R} \\ 0 & 0 & -j\omega C \end{vmatrix} = (j\omega C)^3 \quad (7.11)$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2j\omega C + \dfrac{1}{R} & -j\omega C & 0 \\ -j\omega C & 2j\omega C + \dfrac{1}{R} & -j\omega C \\ 0 & -j\omega C & j\omega C + \dfrac{1}{R} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{11} = \frac{(j\omega RC)^3 + 6(j\omega RC)^2 + 5j\omega RC + 1}{R^3} \qquad (7.12)$$

Тепер

$$\beta(j\omega) = \frac{(j\omega RC)^3}{(j\omega RC)^3 + 6(j\omega RC)^2 + 5j\omega RC + 1} \qquad (7.13)$$

Звідси

$$\frac{1}{\beta(j\omega)} = 1 - \frac{5}{(\omega RC)^2} + j\left[\frac{1}{(\omega RC)^3} - \frac{6}{\omega RC}\right] \qquad (7.14)$$

Отже коло по рис.7.4. буде утворювати фазовий кут 180 ел.град., якщо уявна частина у виразі (7.14) буде дорівнювати нулю

$$\frac{1}{(\omega_г RC)^3} - \frac{6}{\omega_г RC} = 0 \qquad (7.15)$$

Знайдемо частоту генерації генерації з виразу (7.15)

$$\omega_г = \frac{1}{\sqrt{6}RC} \qquad (7.16)$$

При умові (7.15) коефіцієнт підсилення, який забезпечує умову баланса амплітуд, визначаємо з (7.14), (7.16)

$$K(\omega_г) = \frac{5}{(\omega_г RC)^2} - 1 = 29 \qquad (7.17)$$

При побудові транзисторних схем автогенераторів з трьохточковими *RC*-колами виникають труднощі в забезпеченні необхідного коефіцієнта підсилення по виразу (7.17). Справа в тому, що вихід вибіркового *RC*-кола шунтується малим вхідним опором біполярного транзистора, що еквівалентно зменшенню опору навантаження, приведеного до колекторного кола. Крім того, зменшується і коефіцієнт зворотнього зв'язку. В результаті порушується умова балансу амплітуд. Тому *RC*-генератор на одному біполярному транзисторові побудувати не вдається. Але це можна зробити на складеному транзисторі (рис.7.5).

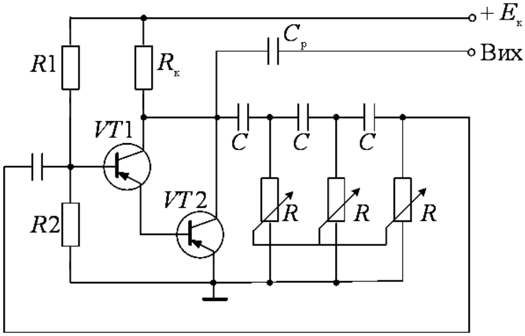


Рис. 7.5

Складений транзистор утворюється транзисторами *VT*1, *VT*2. Вхідний опір складеного транзистора

$$R_{вх} = \frac{R_н}{1-\alpha} \tag{7.18}$$

$$\alpha = 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2), \tag{7.19}$$

де: $R_н$ - опір колекторного кола, включаючи навантаження, на яке працює каскад; α_1, α_2 - коефіцієнти передачі струму транзисторів *VT*1, *VT*2.

В схемі по рис.7.5 вхідний опір складеного транзистора досягає кількох МОм.

7.3. Інші схеми RC-автогенераторів

Другим варіантом узгодження опорів у колі зворотнього зв'язку є застосування емітерного повторювача (рис.7.6).

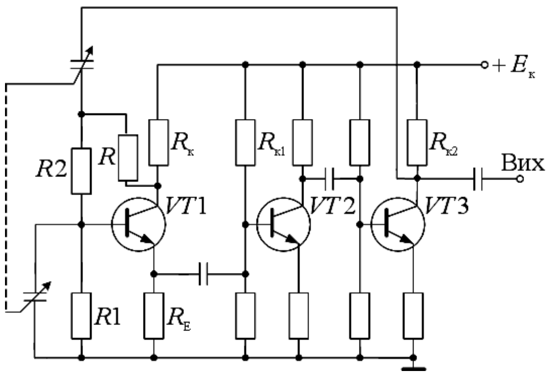


Рис. 7.6

На схемі основні каскади підсилення на транзисторах *VT*2, *VT*3 доповнені емітерним повторювачем на транзисторі *VT*1. Емітерний повторював має великий вхідний і малий вихідний опір і не змінює фазу коливань. У колі зворотнього зв'язку ввімкнений мост Віна. Відомі також схеми *RC*-автогенераторів з подвійним Т-подібним мостом у колі зворотнього зв'язку.

7.4. Порівняння LC- та RC-автогенераторів

Перевагами *RC*-автогенераторів є простота і відсутність індуктивних елементів. Завдяки тому, що частота генерації $\omega_г$ обернено пропорційна першій степені *R* і *C,* а не квадратному кореню, як в *LC*-генераторах, її легко змінювати плавно і в широких межах. Але при цьому треба одночасно змінювати всі ємності, або всі опори кола зворотнього зв'язку. Використовуючи великі номінали опорів, можливо одержати генерацію навіть на інфразвукових частотах, де *LC*-генератори не використовуються.

Недоліком *RC*-генераторів є мала вибірковість кола зворотнього зв'язку. Звідси виникає нестабільність частоти і погіршення форми вихідної напруги. Отже гармонічна форма в *LC*-автогенераторах краще, ніж в *RC*-генераторах. Для покращення форми вихідної напруги і підвищення стабільності частоти в *RC*-генераторах вводиться додатково від'ємний зворотній зв'язок. На рис.7.6. від'ємний зворотній зв'язок реалізується через опір *R*. Зрозуміло, що глибина від'ємного зворотного зв'язку повинна бути меншою при малих амплітудах коливань, щоб виконувались умови самозбудження. Але при зростанні амплітуди коливань від'ємний зворотній зв'язок повинен зростати, обмежуючи зростання амплітуди коливань. Такою властивістю володіють інерційно-нелінійні резистори, які можуть бути використані в схемах рис.7.6 як опір *R*..

Приклад 7.1. Схема *RC*- генератора гармонічних коливань зібрана по рис. 7.1. Знайти коефіцієнт підсилення K_0 активного елемента, при якому відбувається самозбудження генератора, якщо $R1 = R2 =$ 3,6 кОм, $C1 =$ 0,15 мкФ, $C2 =$ 0,05 мкФ. Визначити значення частоти генерації $\omega_{\text{ген}}$.

Розв'язок.

1. Коефіцієнт підсилення K_0 для цієї схеми повинен задовольняти умові

$$K_0 > 1 + \frac{R1C1 + R2C2}{R2C1} =$$

$$= \frac{3,6\cdot 10^3 \cdot 0,15\cdot 10^{-6} + 3,6\cdot 10^3 \cdot 0,05\cdot 10^{-6}}{3,6\cdot 10^3 \cdot 0,15\cdot 10^{-6}} + 1 = 2,333$$

2. Частота генерації

$$\omega_{\text{ген}} = \frac{1}{\sqrt{R1R2C1C2}} = \frac{1}{\sqrt{3,6\cdot 10^3 \cdot 3,6\cdot 10^3 \cdot 0,15\cdot 10^{-6} \cdot 0,05\cdot 10^{-6}}} =$$

$$= 11547 \text{ с}^{-1} = 1,839 \text{ кГц}$$

Приклад 7.2.

Проаналізувати залежність необхідного коефіцієнта підсилення K_0 активного елемента в *RC*- генераторі гармонічних коливань з мостом Віна у колі зворотного зв'язку від вхідного опору активного елемента.

Розв’язок.

З виразу $K_0 = 1 + \dfrac{R1C1 + R2C2}{R2C1}$ такий аналіз можна провести в залежності від опору $R2$, тому що вхідний опір активного елемента підключається паралельно опору $R2$. Приймемо $C1 = C2 = C$. Тоді $K_0 = 1 + \dfrac{R1 + R2}{R2} = 2 + \dfrac{R1}{R2}$. Звідси видно, що при зменшенні $R2$ необхідний коефіцієнт підсилення різко зростає настільки, що стає недостатнім для виконання умов самозбудження.

7.5. Методичні вказівки

В *RC*-генераторах гармонічних коливань коло зворотнього зв’язку включає тільки *R* і *C* елементи. Функція кола зворотнього звязку – забезпечити виконання умови балансу фаз і не вносити значного спотворення сигналу. На вихід кола зворотнього зв’язку підключається перший каскад підсилювача, тому для його мінімального впливу на характеристики фазобалансного *RC*-кола необхідно забезпечувати великий вхідний опір цього каскаду. Для виконання цієї вимоги перший каскад підсилювача конструюється на основі складеного транзистора або емітерного повторювача. Також може використовуватись і польовий транзистор.

RC-автогенератори формують гармонічні коливання низьких частот у порівнянні з *LC*-генераторами. Вони дозволяють без значних зусиль забезпечувати плавну зміну частоти автоколивань у широкому діапазоні, включаючи інфранизькі частоти.

RC-автогенератори мають низьку стабільність частоти генерації і гірше, ніж у *LC*-генераторів форму вихідного струму і напруги. Для послаблення цих недоліків поряд з додатнім зворотнім зв’язком при значних амплітудах вводять і від’ємний зворотній зв’язок.

Задачі.

7.1. *RC*-генератор (рис. 7.7)

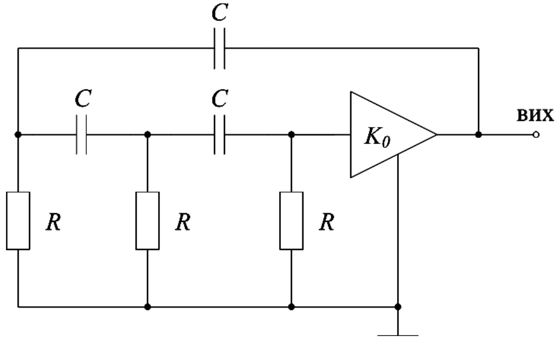


Рис. 7.7

генерує гармонічні коливання частотою $f_{\text{ген}}$=1 кГц. Оберіть параметри схеми, які забезпечують вказану частоту коливань.

Відповідь: $RC = 0,065 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$, *R*= 1 кОм, *C*= 0,065 мкФ, K_0=29.

7.2. *RC*-генератор на рис. 7.1 генерує гармонічні коливання на частоті 250 Гц. Оберіть параметри схеми, що забезпечують вказану частоту коливань.

Відповідь: При $R1 = R2 = R, C1 = C2 = C$ можна прийняти $R1 = R2 = R$ = 3,6 кОм, $C1 = C2 = C$ = 0,177 мкФ, K_0=3.

7.3. Запишіть вирази для частоти генерації $\omega_{\text{ген}}$ та коефіцієнта підсилення K_0 для *RC*- генератора гармонічних коливань з мостом Віна у колі зворотного зв'язку з урахуванням вхідного опору $R_{\text{вх}}$ активного елемента, якщо без такого урахування вони дорівнюють

$$\omega_{\text{ген}} = \frac{1}{\sqrt{R1R2C1C2}}, \; K_0 = 1 + \frac{R1C1 + R2C2}{R2C1}$$

7.4. Запишіть вирази для частоти генерації $\omega_{\text{ген}}$ та коефіцієнта підсилення на частоті генерації $K(\omega_{\text{ген}})$ для *RC*- генератора гармонічних коливань з трьохланковим RC-колом у зворотньому зв’язку без урахуванням вхідного опору активного елемента, якщо при урахуванні вхідного опору вони дорівнюють

$$\omega_{\text{ген}} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{3(\frac{R'}{R}+1)}}, \quad K(\omega_{\text{ген}}) = 14 + 3\frac{R'}{R} + 12\frac{R}{R'}$$

Поясніть опір R'.

Питання для самоперевірки

1. Які схеми RC-кіл для зворотнього зв’язку в автогенераторах вам відомі?
2. Зобразьте схему RC-кола у вигляді моста Віна.
3. Який мінімальний коефіцієнт підсилення повинен забезпечувати автогенератор з мостом Віна у колі зворотнього звязку?
4. Запишіть вираз для амплітудно-частотної характеристики RC-кола у вигляді моста Віна?
5. Запишіть вираз для фазочастотної характеристики RC-кола у вигляді моста Віна.
6. Зобразьте схему трьохланкового RC-кола для зворотнього зв’язку автогенератора.
7. Який коефіцієнт підсилення у автогенераторі з трьоланковим RC-колом задовольняє умові балансу амплітуд?
8. Зобразьте схему складеного транзистора.
9. Назвіть переваги RC-автогенераторів.
10. Назвіть недоліки RC-автогенераторів.

Глава 8

Стійкість кіл зі зворотнім зв'язком

8.1. Постановка задачі стійкості

В техніці зв'язку, радіотехнічних пристроях, системах автоматичного регулювання використовуються пристрої зі зворотнім зв'язком, структура яких відповідає рис. 6.5. До таких пристроїв відносяться, крім генераторів, ще й різноманітні підсилювачі, модулятори, системи автоматичного регулювання амплітуди, частоти та ін.

Від підсилювачів і систем автоматичного регулювання звичайно вимагається, щоб при відсутності вхідного сигналу коливань в них не було, тобто параметри цих пристроїв повинні бути такими, щоб їх стан спокою був стійким.

В протилежність цьому для автогенераторів стан рівноваги повинен бути нестійким і таким, щоб виникали коливання і зростала їх амплітуда, тобто виникало самозбудження. Отже стійкість треба вивчати в одних випадках для її виконання, а в інших – для її порушення.

8.2. Критерій Рауса-Гурвіца

У 1875 р. англійський механік Е. Раус (Routh E.) визначив алгоритм для розрахунку „*k*" коренів дійсного полінома, які розташовані у правій напівплощині. У 1895 р. швейцарський математик А. Гурвіц (Hurwitz A.) незалежно від Рауса також запропонував розв'язок цієї задачі. Звідси критерій стійкості системи називають критерієм Рауса-Гурвіца.

Характеристичне рівняння системи записується у вигляді дійсного полінома

$$a_m p^m + a_{m-1} p^m + ... + a_1 p + a_0 = 0, \qquad (8.1)$$

де $a_0, a_1, ..., a_m$ - дійсні коефіцієнти і $a_m > 0$.

Складемо з коефіцієнтів $a_m, a_{m-1}, ..., a_1, a_0$ визначниками Гурвіца

$$H_1 = a_{m-1} \tag{8.2}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} \\ a_m & a_{m-2} \end{vmatrix} \tag{8.3}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} \end{vmatrix} \tag{8.4}$$

$$H_m = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & a_{m-7}\dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & a_{m-6}\dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \tag{8.5}$$

Правило складання визначників Гурвіца: всі елементи головної діагоналі являють собою коефіцієнти „*a*” зі зростаючим з права наліво індексом від нуля до *m*-1. Елементи, розташовані у стовпцях нижче діагонального елемента, мають зростаючі індекси, після максимального індексу „*m*” ідуть нулі. Елементи, розташовані у стовпцях вище діагонального елемента, мають спадаючі індекси, після мінімального індексу ідуть нулі. Визначники $H_{m-1}, H_{m-2}, ...$ одержують послідовним викреслення з кожного попереднього визначника правого стовпця і нижнього рядка.

Відповідно критерію стійкості Рауса-Гурвіца система буде стійкою, якщо всі коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_m$ дійсні, коефіцієнт $a_m > 0$ і всі визначники Гурвіца H_1, H_2, ...,H_m позитивні.

Критерієм Рауса-Гурвіца зручно користуватися, якщо система задана диференційним рівнянням. Недолік: критерій застосовується тільки для кіл з зосередженими параметрами.

8.3. Критерій Найквіста

Якщо система задана графіками своїх частотних характеристик або по заданій схемі зручно і просто скласти вирази частотних характеристик легко зняти експериментально, то для дослідження стійкості доцільно користуватись критерієм Найквіста.

Критерій Найквіста дозволяє визначати стійкість системи з замкненим зворотнім зв'язком по частотним характеристикам системи з розімкненим зворотнім зв'язком. Звернемося до схеми з послідовним зворотнім зв'язком по напрузі (рис.6.5). З виразів для умов балансу амплітуд і фаз при підтримані незатухаючих коливань (6.12), (6.13) одержимо умови стійкості системи на всіх частотах, тобто умови, при яких виникнення коливань неможливе

$$\begin{cases} \beta(\omega)K(\omega) < 1 \\ \varphi_\beta(\omega) + \varphi_K(\omega) \neq 2\pi k, k = 0,1,2,... \end{cases} \tag{8.6}$$

Система буде стійкою, тобто коливання не виникають, якщо виконується хоча б одна з умов (8.6).

Позначимо

$$K_\Sigma(j\omega) = K(j\omega)\beta(j\omega) - \tag{8.7}$$

-комплексна передаточна функція системи з розімкненим зворотнім зв'язком. У алгебраїчній формі запису одержимо

$$K_{\Sigma}(j\omega) = K_1(\omega) + jK_2(\omega), \qquad (8.8)$$

де $K_1(\omega)$, $K_2(\omega)$ - дійсна (ДЧХ) і уявна (УЧХ) частотні характеристики.

В показниковій формі

$$K_{\Sigma}(j\omega) = K_{\Sigma}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (8.9)$$

де модуль функції $K_{\Sigma}(j\omega)$

$$K_{\Sigma}(\omega) = \sqrt{K_1^2(\omega) + K_2^2(\omega)} \qquad (8.10)$$

і її фаза

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{K_2(\omega)}{K_1(\omega)} \qquad (8.11)$$

Величина $K_{\Sigma}(\omega)$ називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ), а $\varphi(\omega)$ - фазочастотною характеристикою (ФЧХ) системи з розімкненим зворотнім зв'язком.

Маючи ДЧХ та УЧХ або АЧХ та ФЧХ можна побудувати амплітудно-фазо-частотну характеристику системи (АФЧХ). Вона будується на комплексній площині. На вісі абсцис відкладається ДЧХ, на вісі ординат – УЧХ. Або в полярних координатах: від вісі абсцис відкладається кут $\varphi(\omega)$ і на його напрямі – модуль $K(\omega)$ в обраному масштабі. Кінець відрізка позначають стрілкою. Отриманий вектор при зміні частоти ω описує криву, що називають частотним годографом або діаграмою Найквіста.

Критерій стійкості Нейквіста: якщо частотний годограф охоплює точку з координатами (1;*j*0), то система нестійка, якщо не охоплює – стійка. Дійсно з (8.9) одержуємо

$$K_{\Sigma}(j\omega)=K_{\Sigma}(\omega)\cos\varphi(\omega)+jK_{\Sigma}(\omega)\sin\varphi(\omega)=K_1(\omega)+jK_2(\omega) \quad (8.12)$$

В точці $K_1(\omega)=1, K_2(\omega)=0$ маємо

$$\begin{cases} \varphi(\omega)=\varphi_{\beta}(\omega)+\varphi_K(\omega)=0 \\ K_{\Sigma}(\omega)=K(\omega)\beta(\omega)=1 \end{cases} \quad (8.13)$$

Це умова самозбудження системи. Отже, якщо годограф системи включає точку $K_1=1, K_2=0$, система нестійка (рис. 8.1,а).

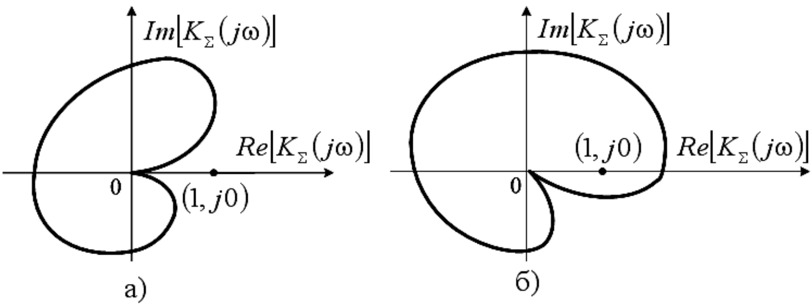


Рис. 8.1

Очевидно і навпаки, якщо умови (8.13) не виконуються, тобто годограф системи не включає точку (1;*j*0), система стійка (рис.8.1,б).

8.4. Інші критерії стійкості

Серед інших критеріїв стійкості доцільно зупинитись на критеріях Михайлова і Ляпунова.Позначимо ліву частину характеристичного рівняння (8.1) через $Q(p)$

$$Q(p)=a_m p^m+a_{m-1}p^{m-1}+...+a_1 p+a_0 \qquad (8.14)$$

Це рівняння *m*-го порядку

Замінимо символ „*p*” на $j\omega$

$$Q(p) = a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + ... + a_1 (j\omega) + a_0 \quad (8.15)$$

Комплексне число

$$Q(j\omega) = Re[Q(j\omega)] + Im[Q(j\omega)] \quad (8.16)$$

Аргумент комплексного числа

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg} \frac{Im[Q(j\omega)]}{Re[Q(j\omega)]} \quad (8.17)$$

Критерій стійкості Михайлова: якщо при зміні частоти ω від 0 до ∞ приріст аргументу $\varphi(\omega)$ буде додатнім і складе $m\pi/2$ - система нестійка.

Відомий також класичний метод визначення стійкості М.А. Ляпунова, який обґрунтував метод аналітичного дослідження стійкості стану рівноваги нелінійних кіл, що полягає в заміні характеристики нелінійного елемента дотичною до неї, взятою поблизу стану, що досліджується.

Приклад 8.1.
Дослідити по критерію Михайлова стійкість системи, характеристичне рівніння якої має вигляд $Q(p) = p^2 + p + 1$.

Розв’язок.
Замінимо символ „*p*” на $j\omega$. Одержимо

$$Q(j\omega) = -\omega^2 + 1 + j\omega$$

Підрахуємо дійсну $Re[Q(j\omega)] = 1 - \omega^2$, уявну $Im[Q(j\omega)] = \omega$ частини та аргумент $\varphi(\omega)$ по (8.17) (табл.8.1).

Таблиця 8.1

ω	0	1	2	3	4	5	6
$Re[Q(j\omega)]$	1	0	-3	-8	-15	-24	-35
$Im[Q(j\omega)]$	0	1	2	3	4	5	6
$\varphi(\omega)$	0	$\frac{\pi}{2}$	$0{,}81\,\pi$	$0{,}89\,\pi$	$0{,}92\,\pi$	$0{,}93\,\pi$	$0{,}94\,\pi$

З таблиці видно, що кут $\varphi(\omega)$ при зростанні частоти ω від 0 до ∞ зростає і прямує до π, тобто до $2\cdot\frac{\pi}{2}$. Характеристичне рівняння в задачі – рівняння другого порядку (*m*=2). Отже по критерію Михайлова система стійка.

Приклад 8.2.

По критерію Михайлова дослідити стійкість системи, характеристичне рівняння якої має вигляд

$Q(p) = 2p^3 + 2p^2 + 3p + 5.$

Розв’язок.

Заміна „*p*” на $j\omega$ дає

$$Q(j\omega) = (5 - 2\omega^2) + j(3\omega - 2\omega^3)$$

Результати розрахунків зведемо в таблицю 8.2

Таблиця 8.2

ω	0	1	1,2	1,6	2	3	4	5	6
$Re[Q(j\omega)]$	5	2	2,12	0	-3	-13	-27	-45	-67
$Im[Q(j\omega)]$	0	1	0	4	-10	-45	-106	-235	-414

$\varphi(\omega)$	0	0,1 π	0	$\frac{\pi}{2}$	0,4 π	0,41 π	0,42 π	0,44 π	0,45 π

З таблиці видно, що кут $\varphi(\omega)$ при зростанні частоти ω від 0 до ∞ розташований у третій чверті комплексної площини і загалом менший, ніж $\frac{3\pi}{2}$. Тобто система нестійка.

Приклад 8.3.
Перевірити за допомогою критерія Рауса-Гурвіца стійкість системи, характеристичне рівняння якої має вигляд $Q(p) = p^3 + 2p^2 + 6p + 4 = 0.$

Розв’язок.
У відповідності з рівнянням (8.2) переконуємся, що $a_3 = 1 > 0,\ a_0 = 4 > 0$. Складаємо визначники Гурвіца

$$H_1 = a_{m-1} = a_{3-1} = a_2 = 2 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} \\ a_m & a_{m-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 + 1\cdot 4 = 8 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

Отже система стійка.

8.5. Методичні вказівки

При постановці задачі стійкості треба зважати на те, що і для підсилювачів і для генераторів аналіз стійкості проходить при умові, що амплітуда коливань невелика і нелінійний елемент замінюється лінійним. Тому теорія стійкості у більшості випадків є лінійною навіть тоді, коли у склад системи входять нелінійні елементи.

Аналіз стійкості завжди починається з розгляду характеристичного рівняння системи і його коренів. Якщо ці корені, або їх дійсна частина від'ємні, то система стійка, якщо додатні – нестійка.

Серед критеріїв стійкості можна вказати на критерій Рауса-Гурвіца, який базується на складанні і розрахунку визначників m-го порядку. Тобто цей метод піддається машинному аналізу, хоч і доволі громіздкий.

Критерій Найквіста зв'язаний з частотними характеристиками системи і допускає графічний аналіз. Розрахунково-графічним можна назвати і критерій Михайлова, що базується на порівнянні місця розташування вектора стану системі на комплексній площині з порядком характеристичного рівняння.

Треба назвати так званий прямий метод Ляпунова, який базується на формуванні і аналізі спеціальних функцій (функцій Ляпунова), по поведінці яких робиться висновок відносно стійкості системи.

Задачі

8.1. Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца, дослідити стійкість системи по прикладу 8.1.

8.2. Використовуючи критерій Найквіста, дослідити систему по прикладу 8.1 на стійкість.

8.3. Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца, дослідити стійкість системи по прикладу 8.2.

8.4. Використовуючи критерій Найквіста, дослідити стійкість системи по прикладу 8.2.

8.5. Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца, дослідити стійкість малих коливань в динамічних системах, що описуються характеристичними рівняннями виду:

а) $p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 0$

б) $p^4 + 2p^3 + 3p^2 + p + 1 = 0 \backslash$

Відповідь:

а) $a_4 = 1 > 0,\ a_0 = 1 > 0$, визначники Гурвіца:
$H_1 = 3 > 0,\ H_2 = 5 > 0,\ H_3 = -4 < 0,\ H_4 = -4 < 0$. Система нестійка.
б) $a_4 = 1 > 0,\ a_0 = 1 > 0$, визначники Гурвіца:
$H_1 = 2 > 0,\ H_2 = 5 > 0,\ H_3 = 1 > 0,\ H_4 = 1 > 0$. Система стійка.

Питання для самоперевірки

1. Запишіть у загальному вигляді характеристичне рівняння системи.
2. Побудуйте визначник Гурвіца *m*-го порядку.
3. Поясніть правило складання визначників Гурвіца.
4. В чому полягає критерій стійкості Рауса-Гурвіца?
5. В чому полягає критерій стійкості Найквіста?
6. Коли зручно користуватись критерієм стійкості Найквіста?
7. Як будується амплітудно-фазова частотна характеристика системи?
8. В чому полягає критерій стійкості Михайлова?

Глава 9

Кола із змінними параметрами

9.1. Загальна характеристика кіл зі змінними параметрами.

Електричні кола, один чи декілька параметрів яких змінюються у часі (але не залежать від вхідного сигнала) називаються параметричними. Такі кола описуються нестаціонарними системними операторами $T(t)$, залежними від часу. Для параметричних кіл

$$u_{\text{вих}}(t) = T(t)u_{\text{вх}}(t) \tag{9.1}$$

Для лінійного параметричного кола справедливий принцип накладання

$$T(t)\left[\alpha_1 u_{\text{вх1}}(t) + \alpha_2 u_{\text{вх2}}(t)\right] = \alpha_1 T(t)u_{\text{вх1}}(t) + \alpha_2 T(t)u_{\text{вх2}}(t) \tag{9.2}$$

Відомі наступні параметричні елементи: резистор $R(t)$, індуктивність $L(t)$, ємність $C(t)$.

Характерною рисою лінійної параметричної системи є наявність допоміжного джерела коливань для керування параметрами елементів. Структурна схема параметричної системи наведена на (рис. 9.1.).

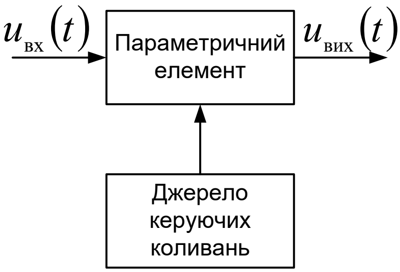


Рис. 9.1

При аналізі процесів в лінійних параметричних колах можуть використовуватись часові та частотні характеристики.

Але в параметричних колах характер проходження сигнала залежить від
часу. Тому в параметричних колах
коефіцієнт передачі залежить не тільки від частоти, а й від часу, тобто можна написати $\dot{K}(\omega,t)$. Часові характеристики (перехідна та імпульсна) залежать не тільки від моменту спостереження t, а й від моменту τ виникнення сигналу на вході кола. Тому перехідна характеристика позначається $h(t,\tau)$, а імпульсна $a(t,\tau)$.
Очевидно

$$\begin{cases} h(t,\tau)=0 \quad \text{при} \quad \tau>t \\ a(t-\tau)=0 \quad \text{при} \quad \tau>t \end{cases} \qquad (9.3)$$

Співвідношення (9.3) відображає принцип причинності: якщо вплив з’являється пізніше моменту спостереження, то реакція в момент спостереження дорівнює нулю.

Зв’язок між перехідною і імпульсною характеристиками записується так

$$h(t,\tau)=\int_{-\infty}^{t} a(t,\tau)d\tau \qquad (9.4)$$

$$a(t,\tau)=\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial \tau} \qquad (9.5)$$

Якщо $u_{\text{вх}}(t)$ - вхідний сигнал, то вихідний сигнал $u_{\text{вих}}(t)$ лінійного параметричного кола визначається через інтеграл згортки (накладання)

$$u_{\text{вих}}(t)=\int_{-\infty}^{t} u_{\text{вх}}(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (9.6)$$

Частотний коефіцієнт передачі визначається через перетворення Фур’є від імпульсної характеристики

$$\dot{K}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t,\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad (9.7)$$

Звідси через обернене перетворення Фур'є знаходимо імпульсну характеристику

$$a(t,\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega,t) e^{j\omega\tau} d\omega \qquad (9.8)$$

Якщо $\dot{S}_{u\,\text{вх}}(\omega)$ - спектральна щільність вхідного сигналу, то спектральна щільність вихідного сигналу для лінійного параметричного кола знаходимо по співвідношенню

$$\dot{S}_{u\,\text{вх}}(\omega,t) = \dot{K}(\omega,t)\dot{S}_{u\,\text{вх}}(\omega) \qquad (9.9)$$

З виразу (9.8) виходить, що спектральна щільність реакції нестаціонарної лінійної системи являє собою миттєве значення спектра при визначеному фіксованому моменті часу *t.* З виразу (9.9) можна записати середнє значення миттєвого спектра

$$\overline{\dot{S}_{u\,\text{вих}}(\omega)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \dot{S}_{u\,\text{вих}}(\omega,t) dt \qquad (9.10)$$

З виразу (9.10) через обернене перетворення Фур'є визначається вихідна реакція $u_{\text{вих}}(t)$.

9.2. Проходження сигналу через резистивне параметричне коло

Резистивні кола – безінерційні кола, перехідні процеси в них не виникають. Позначимо системний оператор резистивного кола $K(t)$. Тоді зв'язок між вхідним і вихідним сигналами запишеться так

$$u_{\text{вих}}(t) = K(t)u_{\text{вх}}(t) \tag{9.11}$$

Прикладом такої системи є параметричний резистор $R(t)$ (рис. 9.2,а), залежний від часу (рис.9.2,б).

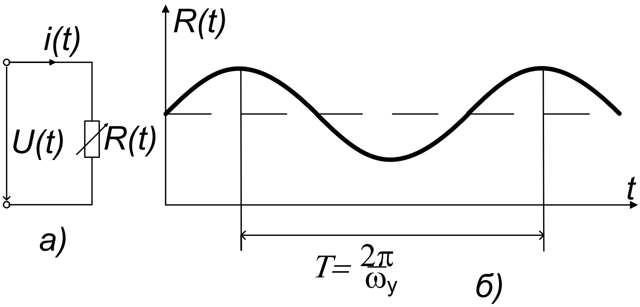


Рис. 9.2

По рис. 9.2,а можемо записати

$$u(t) = R(t)i(t)$$

Звідси змінна параметрична провідність

$$G(t) = \frac{1}{R(t)}$$

9.3 Спектр струму у параметричному резистивному двополюснику

Звичайно сигнал накачки є періодичним у часі. Тому провідність $G(t)$ також періодична у часі і може бути представлена рядом Фур'є

$$G(t) = \frac{G_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos(k\omega_{\text{н}} t + \psi_k), \tag{9.12}$$

де: $\omega_{н}$ - частота сигнала накачки, G_k, ψ_k - амплітуда і фаза *k*-х гармонік у спектрі функції $G(t)$.
Вхідний сигнал приймемо періодичною напругою

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (9.13)$$

Струм у колі

$$i(t) = G(t)u(t) = \frac{U_0}{2}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} U_0 G_k \cos(k\ \omega_{н} t - \psi_k)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{U_0 G_0}{2}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos\ \left[(\omega_0 + k\omega_{н})t + \varphi_0 - \psi_k\right] + \qquad (9.14)$$

$$+\frac{U_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos\ \left[(\omega_0 - k\omega_{н})t + \varphi_0 + \psi_k\right] =$$

$$= \frac{U_0}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k \cos\ \left[(\omega_0 + k\omega_{н})t + \varphi_0 - \psi_k\right]$$

Спектр струму зображений на діаграмі рис. 9.3.

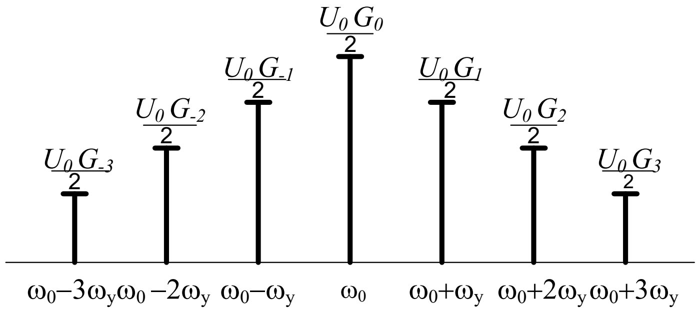


Рис. 9.3

Він симетричний відносно частоти сигнала ω_0 і більш простий, ніж у безінерційному нелінійному елементі. На рис. 9.3 принципово відсутні вищі гармоніки частоти сигналу ω_0.

9.4. Перетворення частоти

Перетворення частоти це трансформація модульованого сигналу, яка полягає у перенесенні спектру цього сигналу з околиці несучої частоти $\omega_{н}$ до околиці певної проміжної частоти $\omega_{пр}$ без зміни закону модуляції, тобто без зміни відносних співвідношень між гармонічними складовими спектра.

Основні блоки перетворювача частоти: змішувач і гетеродин. Змішувач це параметричний безінерційний елемент. Гетеродин – це допоміжний генератор гармонічних коливань з частотою $\omega_{г}$, який служить для параметричного управління змішувачем.

На практиці параметричний безінерційний елемент реалізується на базі нелінійного резистора з вольтамперною характеристикою $i = f(u)$. Для цього на нелінійний резистор подається сума двох коливань: напруги управління $u_{у}(t)$ і напруги сигнала $u_{с}(t)$ (рис. 9.4).

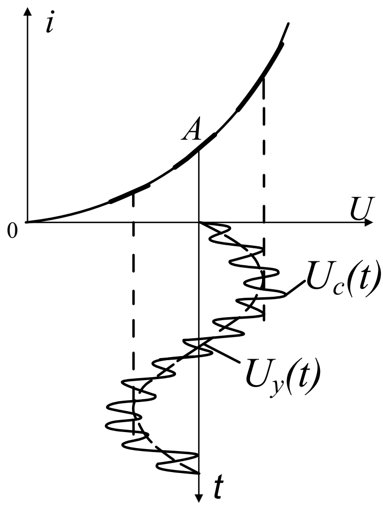


Рис. 9.4

Амплітуда напруги управління значно перевищує амплітуду сигнала. Під впливом напруги управління від гетеродина робоча точка А переміщується по кривій $i = f(u)$. Внаслідок нелінійності ВАХ значення диференціальної крутизни змінюється по періодичному закону і може бути представлена рядом Фур'є

$$S_{\text{диф}}(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_{\text{г}} t + S_2 \cos 2\omega_{\text{г}} t + \ldots \qquad (9.15)$$

Якщо на вході перетворювача діє АМ-сигнал

$$u_{\text{с}}(t) = U_{\text{н}}(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t, \qquad (9.16)$$

то вихідний струм

$$i_{\text{с}}(t) = S(t) u_{\text{с}}(t) = U_{\text{н}}(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t (S_0 + S_1 \cos \omega_{\text{г}} t + \ldots) =$$

$$= U_{\text{н}}(1 + M \cos \Omega t) \Big[S_0 \cos \omega_{\text{н}} t + \frac{1}{2} S_1 \cos(\omega_{\text{г}} - \omega_{\text{н}}) t +$$

$$+ \frac{1}{2} S_1 \cos(\omega_{\text{г}} + \omega_{\text{н}}) t + \frac{1}{2} S_2 \cos(2\omega_{\text{г}} - \omega_{\text{н}}) t +$$

$$+ \frac{1}{2} S_2 \cos(2\omega_{\text{г}} + \omega_{\text{н}}) t + \ldots \Big]$$

За проміжну частоту обирається частота $\omega_{\text{пр}} = |\omega_{\text{г}} - \omega_{\text{н}}|$.

Струм коливального контуру, настроєного на частоту $\omega_{\text{пр}}$

$$i_{\text{пр}}(t) = \frac{1}{2} S_1 U_{\text{н}} (1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{пр}} t = \frac{1}{2} S_1 U_{\text{н}} \cos \omega_{\text{пр}} t +$$
$$+ \frac{S_1 M U_{\text{н}}}{4} \cos(\omega_{\text{пр}} + \Omega) t + \frac{S_1 M U_{\text{н}}}{4} \cos(\omega_{\text{пр}} - \Omega) t \qquad (9.17)$$

є коливанням з тим же законом модуляції, що й у вхідному АМ-сигналі. Спектри коливань для напруги вхідного сигналу на несучій частоті $\omega_{\text{н}}$ і струму вихідного сигналу на проміжній частоті представлені на рис. 9.5,а,б відповідно.

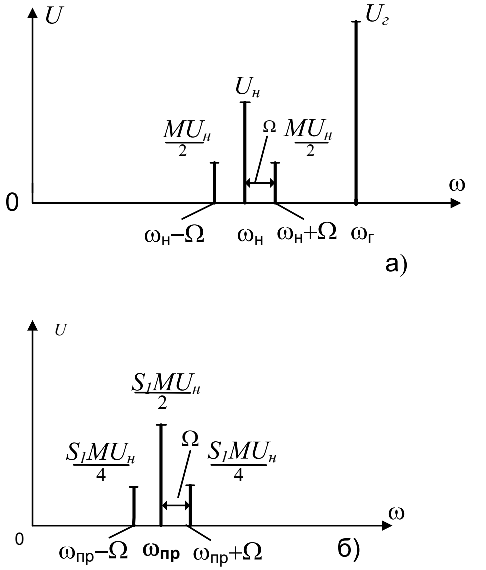


Рис. 9.5

Тут прийнято $\omega_г > \omega_н$.

9.5. Супергетеродинний приймач

Перетворення частоти широко використовується в супергетеродинних приймачах (рис. 9.6).

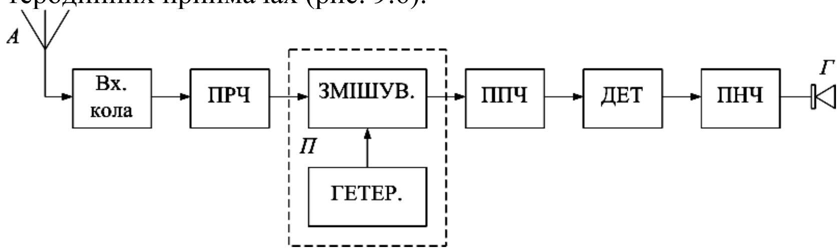


Рис. 9.6

Сигнал від антени А через вхідні кола (фільтри) і підсилювач радіочастоти (ПРЧ) подається на змішувач перетворювача (П). Гетеродин формує сигнал управління для змішувача. Вихідний сигнал перетворювача є модульованим коливанням з несучою частотою, що дорівнює проміжній частоті приймача $\omega_{пр}$. Це коливання подається на вузькополосний підсилювач проміжної частоти (ППЧ). Після детектора корисний сигнал підсилюється в підсилювачі низької частоти (ПНЧ) і перетворюється в гучномовці (Г).

Основна перевага супергетеродина – незмінність проміжної частоти при настройці приймача на різні радіостанції. Дійсно, при зміні несучої частоти $\omega_н$ радіостанції перестроюється і частота гетеродина $\omega_г$, в результаті проміжна частота $\omega_{пр} = (\omega_г - \omega_н)$ залишається незмінною.

З спектра (9.17) видно, що перетворювач частоти однаково реагує на сигнали з частотами $\omega_{c1} = (\omega_г - \omega_{пр})$ та $\omega_{пр} = (\omega_г - \omega_c)$. В обох випадках проміжна частота $\omega_{пр} = (\omega_г - \omega_н)$ однакова. Тому в радіотехніці говорять, що можливий прийом як по основному $(\omega_{c1} = \omega_г + \omega_{пр})$, так і по дзеркальному каналу $(\omega_{c2} = \omega_г - \omega_{пр})$. По дзеркальному каналу надходить перешкода, спектр якої розташований на відстані двох проміжних частот $2\omega_{пр}$ від спектра сигнала (рис. 9.7).

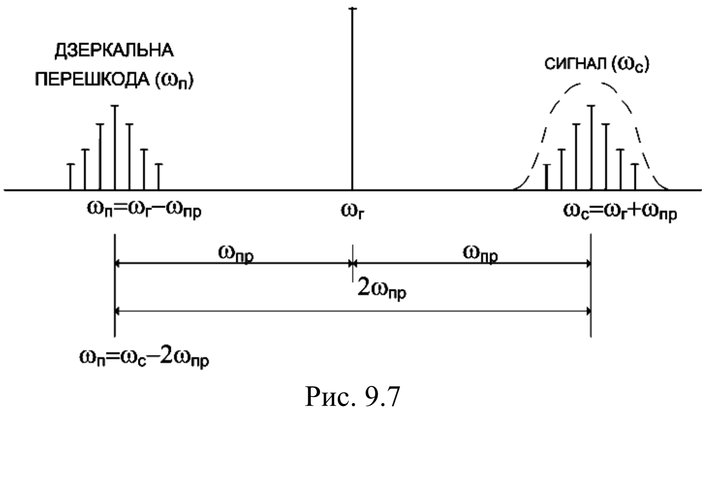


Рис. 9.7

З рисунка видно, що $\omega_{пр} = |\omega_г - \omega_с| = |\omega_г - \omega_п|$, де $\omega_п$ - частота перешкоди.

Сигнал перешкоди по дзеркальному каналу необхідно відфільтровувати у вхідних колах між антеною і змішувачем і залишати тільки спектр сигнала по рис. 9.7, бо підсилювач радіочастоти та змішувач реагують на сигнал і дзеркальну перешкоду однаково.

Транзисторна схема змішувача наведена на рис. 9.8.

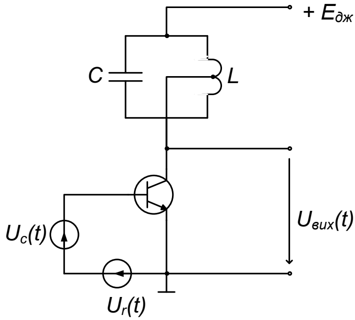


Рис. 9.8

Контур *LC* настроюється на проміжну частоту $\omega_{пр} = |\omega_г - \omega_с|$

9.6 Синхронне детектування при перетворенні частоти

Синхронне детектування амплітудно-модульованих коливань, розглянуте в розділі 5.2.4, реалізується при перетворенні частоти сигнала.

Припустимо, що частота гетеродина дорівнює частоті сигнала ($\omega_г = \omega_с$). Тоді диференціальна крутизна по (9.15)

$$S_{диф}(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_с t + S_2 \cos 2\omega_с t + ... \qquad (9.18)$$

Амплітудно-модульований сигнал на вході змішувача

$$u_с(t) = U_m(1 + M \cos \Omega t)\cos(\omega_с t + \varphi_с) \qquad (9.19)$$

Струм змішувача

$$
\begin{aligned}
i_{\text{зм}}(t) = S_{\text{диф}}(t)u_{\text{с}}(t) = U_m(1+M\cos\Omega\, t)\Big[S_0 + S_1\cos(\omega_{\text{с}}t+\varphi_{\text{с}}) + \\
+\frac{1}{2}S_1\cos(2\omega_{\text{с}}t+\varphi_{\text{с}}) + \frac{1}{2}S_2\cos\varphi_{\text{с}} + \ldots\Big]
\end{aligned}
\tag{9.20}
$$

Вираз у квадратних дужках містить сталу компоненту $\frac{S_1}{2}\cos\varphi_{\text{с}}$. Після фільтру нижніх частот одержуємо

$$
i_{\text{нч}}(t) = \frac{U_m S_1}{2}(1+M\cos\Omega t)\cos\varphi_{\text{с}} \tag{9.21}
$$

Цей струм пропорційний АМ-сигналу, тобто аналогічний виразу (5.20) у розділі 5.2.4. Отже при перетворенні частоти можливо реалізувати режим синхронного детектування.

9.7. Енергетичні співвідношення в параметричних реактивних елементах кола

Параметричні нелінійні елементи *L(t), C(t)* при визначених умовах можуть грати роль „посередників”, що передають частину енергії від зовнішніх керуючих елементів – „генераторів накачки” – до кіл, що несуть корисний сигнал, наприклад, до коливального контуру. На цьому принципі базується параметричне підсилення та збудження коливань.

Розглянемо параметричну ємність *C(t)*, яка реалізується плоским конденсатором з ємністю „ C ” і відстанню x_0 між обкладками. Заряд на конденсаторі $q = CU_0$, де U_0 - напруга між обкладками.

Припустимо, що механічно зазор між обкладками збільшений до величини $x_0 + dx.$ Збільшення зазору відбувається проти сил електричного поля, тобто зовнішні сили виконують додатну роботу і енергія поля в конденсаторі зростає.

Початкова енергія в конденсаторі

$$E = \frac{q^2}{2C} \qquad (9.22)$$

З виразу (9.22) видно, що для збільшення запаса енергії електричного поля конденсатора необхідно за рахунок зовнішніх сил зменшити ємність зарядженого конденсатора, наприклад, збільшити відстань між обкладками. І навпаки, якщо відстань між обкладками зменшувати, ємність „ C ” зростає, а енергія поля віддається зовнішнім силам. Тобто результуючий приплив енергії в конденсаторі відсутній.

Ємність конденсатора можна змінювати будь-яким способом. На практиці для здійснення параметричної зміни ємності у коливальний контур вводять варікап і керують величиною його ємності за допомогою змінної напруги. Напругу і частоту такого впливу називають відповідно напругою і частотою накачки.

Розглянемо високодобротний коливальний контур, який складається з постійної індуктивності *L*, опору втрат *R* і параметричної ємності *C(t)* (рис. 9.9)

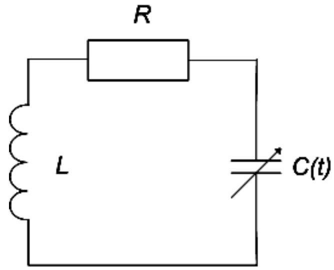


Рис. 9.9

Власна частота коливань

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}},$$

де C_0 - середня ємність конденсатора

Припустимо, що в контурі в результаті флуктуацій виникли слабкі коливання, які відбуваються за гармонічним законом (рис.9.10,а). Припустимо, що ємність конденсатора миттєво змінюється на величину ΔC в моменти t_1 і t_3, коли напруга на ємності максимальна.

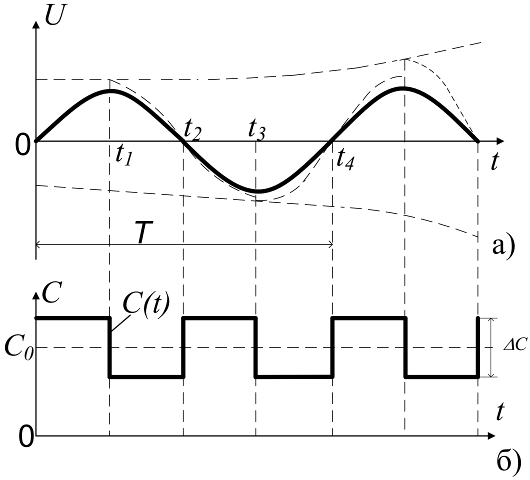


Рис. 9.10

Повернення ємності у вихідне положення відбувається при $u = 0$ (точки $t_2, t_4,$ рис. 9.10).

При такому режимі перемикань має місце однонаправлений приплив енергії в контур. Дійсно, при від'ємних перепадах ємності (моменти t_1, t_3) напруга на ємності максимальна і робота зовнішніх сил завжди додатня. При додатніх перепадах ємності (моменти t_2, t_4) напруга на ємності нульова і віддача енергії у зовнішнє коло відсутня.

Максимальна енергія в ємності

$$E_{\max} = (C_0 + \frac{\Delta C}{2})\frac{U_{mc}^2}{\sqrt{2}} \approx \frac{C_0 U_{mc}^2}{2} \qquad (9.23)$$

Тоді з виразу (9.22)

$$dE = \frac{\partial E}{\partial C} dC = -\frac{q^2}{2}\frac{1}{C^2} dC = -E\frac{dC}{C}$$

Енергія накачки конденсатора (двічі за період)

$$E_н = 2E_{\max}\frac{\Delta C}{C_0} \approx 2\frac{C_0U_{mc}^2}{2}\frac{\Delta C}{C_0} = U_{mc}^2\Delta C \qquad (9.24)$$

Середня потужність втрат в контурі

$$P_{втр.} = \frac{I_m^{\ 2}}{2}R = \frac{1}{2}\frac{U_{mc}^2}{\rho^2}R = \frac{1}{2}\frac{U_{mc}^2}{\rho Q} \qquad (9.25)$$

Енергія втрат за період коливань

$$E_{\text{втр}} = P_{\text{втр}}T = \frac{U_{mc}^2 2\pi}{2\rho Q\omega_0} = \frac{2\pi U_{mc}^2\sqrt{LC_0}}{2\sqrt{\frac{L}{C_0}}Q} = \frac{\pi C_0 U_{mc}^2}{Q} \qquad (9.26)$$

Якщо втрати в контурі компенсуються енергією накачки ($E_{\text{втр.}}= E_{\text{н.}}$) , то коливальна система стає ідеальною.

При $E_{\text{н.}} > E_{\text{втр.}}$ система стає нестійкою, амплітуда коливань зростає, відбувається параметричне збудження коливань в системі.

З рис. 9.10 видно, що основна частота накачки $\omega_{н.} = 2\omega_0$. Але, зрозуміло, що частота накачки може бути і нижче, наприклад $\omega_{\text{н}} = \dfrac{\omega_0}{n}$, де n=1,2,... Важливо тільки,щоб в спектрі сигнала накачки була присутня складова з частотою $2\omega_0$. Також необхідно суворо витримувати фазові співвідношення між власними коливаннями і коливаннями генератора накачки. Якщо, наприклад, сигнал накачки змістити на півперіода, то конденсатор не буде одержувати енергію від генератора накачки і не буде віддавати енергію в контур, тобто конденсатор буде виконувати роль додаткового резистивного навантаження.

Приклад 9.1.
У перетворювачі частоти по рис. 9.8 використаний транзистор з вольтамперною характеристикою $i_{\text{к}} = 20U_{\text{БЕ}}^2$. Резонансний опір коливального *LC*-контура у колекторному колі $R_{\text{рез}}$=50 мкВ. Амплітуда немодульованого вхідного сигналу $U_{m\ \text{н}}$=50 мкВ, амплітуда напруги гетеродина $U_{m\ \text{г}}$=0,5 В. Знайти значення амплітуди напруги проміжної частоти $U_{m\ \text{пр}}$ на виході перетворювача.

Розв'язок.
1. По формулі (9.17) амплітуда струму проміжної частоти у колекторному колі

$I_{m\ \text{пр}} = \frac{1}{2} S_1 U_{m\ \text{н}}$, де S_1 - амплітуда першої гармоніки диференційної крутини транзистора.

2. Диференційна крутизна транзистора

$$S(t) = \frac{di_{\text{К}}}{dU_{\text{БЕ}}} = 2 \cdot 20U_{\text{БЕ}} = 40U_{\text{БЕ}}\ (\frac{\text{мА}}{\text{В}})$$

3. Напруга на вході транзистора

$$U_{\text{БЕ}} = U_0 + U_{m\ \Gamma} \cos \omega_\Gamma t$$

4. Диференційна крутизна транзистора

$$S(t) = 40(U_0 + U_{m\ \Gamma} \cos \omega_\Gamma t) = 40U_0 + 40U_{m\ \Gamma} \cos \omega_\Gamma t$$

5. Амплітуда першої гармоніки диференційної крутизни

$$S_1 = 40U_{m\ \Gamma} = 40 \cdot 0,5 = 20\ (\frac{\text{мА}}{\text{В}})$$

6. Струм проміжної частоти

$$I_{m\ \text{пр}} = \frac{1}{2} S_1 U_{m\ \text{н}} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 0,5 \cdot 10^{-6} = 0,5\ (\text{мкА})$$

7. Амплітуда напруги проміжної частоти

$$U_{m\ \text{пр}} = I_{m\ \text{пр}} R_{\text{рез}} = 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^3 = 1,5 \cdot 10^{-3} = 1,5\ \text{мВ}$$

Приклад 9.2.

В синхронному детекторі використаний транзистор, вольтамперна характеристика якого $i_к = f(u_{БЕ})$ апроксимується кусково-лінійним методом за допомогою двох відрізків прямих (рис. 9.11). Параметри апроксимації: $S = 50\ \frac{мА}{В}$, $U_п$ =0,3 В. Амплітуда напруги гетеродина $U_{m\,Г}$ =1 В, постійна напруга зміщення відсутня (U_0 =0). Немодульована напруга корисного сигналу з амплітудою $U_{m\,С}$ = 25 мкВ зміщена по фазі відносно коливань гетеродина на кут $\varphi_С = 45^\circ$. Визначити зміну рівня постійної напруги на виході синхронного детектора , що викликається корисним сигналом, якщо опір резистора $R_Н$ = 1,2 кОм.

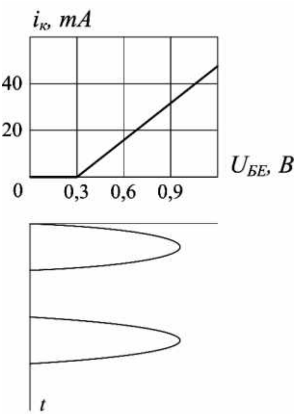


Рис. 9.11

Розв’язок.

1. Для ВАХ по рис.9.11 диференційна крутизна транзистора $S_{диф}$ може приймати лише два значення

$$S_{диф} = \begin{cases} 0, \text{при } u_{БЕ} < U_П, \\ S, \text{при } u_{БЕ} \ge U_П \end{cases}$$

2. Струм транзистора має форму косинусоїдних імпульсів з відсічкою. Кут відсічки по (2.13)

$$\theta = \arccos\frac{U_{\Pi} - U_0}{U_{m\,\Gamma}} = \arccos\frac{0,3 - 0}{1} = 72,5^\circ$$

3. Отже диференційна крутизна змінюється в часі у вигляді періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів (рис. 9.12).

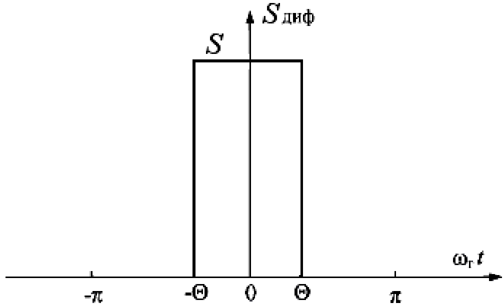


Рис. 9.12

Ця послідовність може бути розкладена в ряд Фур'є. Синусоїдна компонента відсутня. Залишається косинусоїдна компонента. Її перша гармоніка по (2.6)

$$S_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S\cos\xi d\xi = \frac{S}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\cos\xi d\xi = \frac{2S}{\pi}\sin\theta = \frac{2\cdot 1}{\pi}\sin 72,5^\circ = 30,35\ \frac{\text{мА}}{\text{В}}$$

4. Наявність корисного сигнала по (9.21) викликає приріст струму через транзистор

$$\Delta i = \frac{S_1 U_{m\,\mathrm{C}}}{2}\cos\varphi_{\mathrm{C}} = \frac{30,35\cdot 10^{-3}\cdot 25\cdot 10^{-6}}{2}\cos 45^{\circ} =$$

$$= 0,268\cdot 10^{-6} = 0,268\ \text{мкА}$$

5. Постійна напруга на виході змінюється на величину

$$\Delta U_{\text{ВИХ}} = -\Delta i R_{\text{Н}} = 0,268\cdot 10^{-6}\cdot 1,2\cdot 10^{3} = -0,32\cdot 10^{-3} = -0,32\ \text{мВ}$$

Знак „ – ” обумовлений тим, що при протіканні струму через транзистор напруга на ньому зменшується.

9.8. Методичні вказівки

Кола, параметри яких залежать від часу, називаються параметричними. Але залежність від часу не може бути обрана довільно, а залежить від зміни у часі електромагнітних величин. У діючих параметричних системах задається примусова зміна параметрів незалежно від керуючих виливів. Звідси виходить можливість перетворення нелінійного кола в параметричне. Таке перетворення можливе завжди. Отже, обидва вида схем – нелінійні і пераметричні – тісно зв’язані між собою. Але зворотнє перетворення параметричної системи у нелінійну в загальному випадку неможливе тому, що діючі параметричні системи володіють більшими можливостями для досягнення певних властивостей кіл, які не завжди можливо одержати в нелінійних колах.

Особливістю лінійних параметричних кіл є залежність часових характеристик,як від моменту виникнення вхідного сигналу, так і від моменту спостереження. Ці характеристики можуть використовуватись для аналізу цих кіл. Те ж стосується і частотних характеристик параметричних кіл. Вони залежать як від частоти, так і від часу. В результаті спектральна щільність реакції нестаціонарної лінійної системи являє собою миттєве значення спектра при визначеному фіксованому моменту часу. Тому зручно використовувати поняття середнього значення миттєвого спектра.

Вказані особливості параметричних кіл приводять до того , що спектр струму у параметричному елементі більш простий, ніж у безінерційному нелінійному елементі.

Однією зі значних переваг параметричних кіл є можливість побудови перетворювачів частоти, які є основним елементом супергетеродинного приймача. Ця перевага полягає в незмінності проміжної частоти супергетеродинна при прийомі сигналів різних по частоті радіостанцій.

Крім того, параметричні реактивні елементи здатні накопичувати енергію при визначених умовах, що дає додаткові можливості для застосування параметричних кіл у підсилювачах і генераторах.

Задачі.

9.1. Перетворювач частоти (змішувач) зібраний на транзисторі (рис. 9.13).

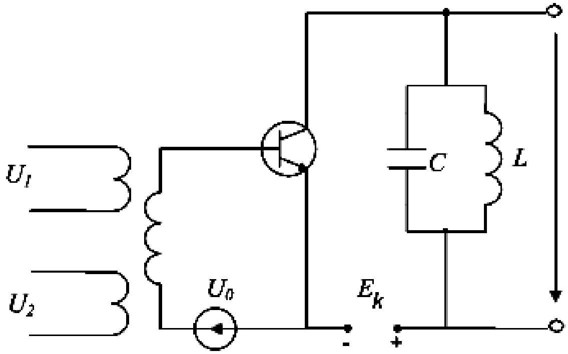


Рис. 9.13

Вольтамперна характеристика при $E_{\text{К}}$ =0,5 В апроксимується на ділянці $0{,}1\ \text{В} \le u_{\text{вх}} \le 0{,}9\ \text{В}$ квадратичною параболою $i_{\text{К}} = 3{,}1(u_{\text{вх}} - 0{,}5)^2$. Напруга зміщення U_0 =0,5 В. На вході схеми діють дві гармонічні напруги $u_{\text{вх}}(t) = u_1(t) + u_2(t)$, де $u_1(t) = 0{,}1\cos\omega_1 t$ В, $u_2(t) = 0{,}3\cos\omega_2 t$ В.Частота $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = 800$ кГц. Вихідний LC-контур настроєний на проміжну частоту $f_{\text{пр}}$=465 кГц. Резонансний опір контуру $R_{\text{рез}}$=3 кОм. Знайти частоту гетеродина f_2 та амплітуду напруги проміжної частоти на контурі.

Відповідь: $f_2 = f_{\text{Г}}$=1265 кГц; $U_{\text{кон.пр}}$=0,279 В.

9.2. Залежність струму стоку $I_{\text{С}}$ польового транзистора, що використовується в змішувачі, від напруги на затворі $U_{\text{З}}$ визначається формулою $I_{\text{С}} = bU_{\text{З}}^2$. Коефіцієнт $b = 1\dfrac{\text{мА}}{\text{В}^2}$, амплітуда напруги гетеродина $U_{\text{Г}}$=1 В. Розрахуйте залежність крутизни перетворення по першій гармоніці коливання гетеродина від напруги зміщення на затворі при зміні його від 0 до 3В.

Примітка:

1. Використайте кусково-лінійну апроксимацію залежності диференційної крутизни характеристики транзистора від напруги на затворі $S_{диф} = f(U_з)$.

2. Використайте формулу крутизни перетворення по першій гармоніці: $S_1 = (S_{max} - S_{min})\alpha_1(\theta)$

3. Величину $\alpha_1(\theta)$ - коефіцієнта розкладання ряда Фурьє по крутизні для першої гармоніки – знайдемо з графіків (наприклад довідник Сифоров [], стор.48)

4. Крутизна перетворення по першій гармоніці $S_П = \frac{1}{2} S_1$.

Відповідь: контрольні точки: при U_0=0,5В одержуємо $S_П = 0,8\ \frac{мА}{В}$, при U_0=1 В одержуємо $S_П = 1\ \frac{мА}{В}$.

9.3. Транзистор КТ 301 працює в схемі змішувача при режимі: $U_Г$ = 0,35 В, $U_{БЕ}$ = 0,35 В, $U_{КЕ}$ = 10 В. Використовуючи вхідну та вихідну характеристики транзистора (рис. 9.14 а,б), визначити крутизну перетворення по першій гармоніці коливань гетеродина.

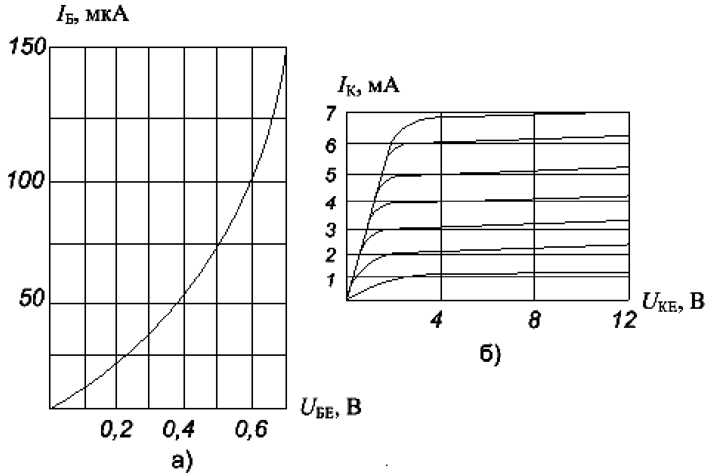


Рис. 9.14

Відповідь: $S_П = 3,5\ \frac{мА}{В}$

Примітка: одержане вами значення може відрізнятись від наведеного на 10...20 % по причині неточності апроксимації прохідної характеристики $I_{\text{к}} = f(U_{\text{БЕ}})$

9.4. Безінерційний нелінійний резистор має вольтамперну характеристику $i(u) = 5 + 2,5u + 1,5u^2$, мА. На резисторі діє напруга $u(t) = 3 + 0,5\cos\Omega t$. Виведіть формулу залежності диференційної крутизни від часу.
Відповідь: $S(t) = 11,5 + 1,5\cos\Omega t$.

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає принцип суперпозиції в параметричних колах?
2. Дайте визначення параметричних кіл.
3. Яка роль допоміжного джерела коливань у параметричних колах?
4. Які особливості використання часових характеристик при аналізі процесів у параметричних колах?
5. Які особливості використання частотних характеристик при аналізі процесів у параметричних колах?
6. Чим відрізняється спектр струму у параметричному резистивному двохполюснику від спектру струму у безінерційному нелінійному елементі?
7. Що таке перетворення частоти у параметричних колах?
8. Зобразьте блок-схему перетворювача частоти і поясніть його роботу.
9. Зобразьте блок-схему супергетеродинного приймача.
10. У чому полягає основна перевага супергетеродинного приймача?
11. Поясніть принцип синхронного детектування при перетворенні частоти.
12. Поясніть механізм накопичення енергії у параметричному реактивному елементі.

Глава 10

Параметричні підсилювачі і генератори

10.1. Принципи параметричного підсилення

Властивість параметричних елементів при визначених умовах відігравати роль джерел енергії – активних елементів – дозволяє створювати параметричні підсилювачі. Вони застосовуються, в основнову, у НВЧ-діапазоні як вхідні каскади високочутливих радіоприймальних пристроїв. Основна перевага параметричних підсилювачів – низький рівень власних шумів за рахунок відсутності в них дробових флуктуацій струму.

Параметричні елементи (параметричні конденсатори) реалізуються напівпровідниковими діодами – варакторами.

Робота варактора пояснюється наступним чином. Якщо до *p-n*-переходу діода прикласти напругу зворотньої полярності, то заряд q зачиненого шару діода є нелінійною функцією цієї напруги "u". Залежність $q(u)$ називають кулон-вольтною характеристикою нелінійного конденсатора. Якщо напруга на *p-n*-переході змінюється, виникає струм зміщення

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du}\frac{du}{dt} = C_{\text{диф}}(u)\frac{du}{dt} \qquad (10.1)$$

Тут $C_{\text{диф}}(u)$ – диференціальна ємність варактора, описується наближеною формулою

$$C_{\text{диф}} = \frac{k}{\sqrt{\varphi_k + |u|}}, \qquad (10.2)$$

де k – коефіцєнт розмірності; $\varphi_k \approx 0,3\text{В}$ - контактна різниця потенціалів.

Чим більше напруга "u", тим менше диференційна ємність варактора.

Сучасні варактори мають доволі досконалі характеристики і здатні працювати до частот у кілька десятків гигагерц, що відповідає міліметровому діапазону довжини хвиль.

Може бути створений також елемент з параметричною індуктивністю $L(t)$. Це індуктивна котушка з осердям з ферромагнітного матеріалу з різко вираженою залежністю індукції “B” від струму намагнічення I. Але такі елементи не знайшли широкого застосування по причині інерційності процесів перемагнічення матеріалу.

10.2. Зв’язок між напругою та струмом у параметричному конденсаторі

Розглянемо коло, утворене джерелом сигналу

$$u(t) = U_m \cos(\omega_с t + \varphi_с) \qquad (10.3)$$

і конденсатором, ємність якого змінюється у часі за гармонічним закону з частотою накачки $\omega_н$.

$$C(t) = C_0\left[1 + \beta\cos\left(\omega_н \mathrm{t} + \varphi_н\right)\right] \qquad (10.4)$$

Тут β - глибина модуляції ємності.

Заряд на конденсаторі $q = C(t)u$, тому струм

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq}{dt} = \frac{dC(t)}{dt}u(t) + C(t)\frac{du(t)}{dt} = \\ &= -\beta\omega_н C_0 U_m \sin(\omega_н t + \varphi_н)\cos(\omega_с t + \varphi_с) - \omega_с C_0 U_m \sin(\omega_с t + \varphi_с) - \\ &\quad -\beta\omega_с C_0 U_m \cos(\omega_н t + \varphi_н)\sin(\omega_с t + \varphi_с) \end{aligned} \qquad (10.5)$$

Скористаємося формулою

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

Тоді добутки першого та третього доданків у правій частині формули (10.5) можна представити так

$$\sin(\omega_н t+\varphi_н)\cos(\omega_с t+\varphi_с)=\frac{1}{2}\{\sin[(\omega_н+\omega_с)t+\varphi_с+\varphi_н]-$$
$$-\sin[(\omega_с-\omega_н)t+\varphi_с-\varphi_н]\},$$

$$\cos(\omega_н t+\varphi_н)\sin(\omega_с t+\varphi_с)=\frac{1}{2}\{\sin[(\omega_н+\omega_с)t+\varphi_с+\varphi_н]-$$
$$-\sin[(\omega_н-\omega_с)t+\varphi_н-\varphi_с]\}$$

Отже

$$i(t)=-\omega_с C_0 U_m\sin(\omega_с t+\varphi_с)-\frac{1}{2}(\omega_н+\omega_с)\beta C_0 U_m\sin[(\omega_с+\omega_н)t+$$
$$+\varphi_с+\varphi_н]+\frac{1}{2}(\omega_с-\omega_н)\beta C_0 U_m\sin[(\omega_н-\omega_с)t+\varphi_н-\varphi_с] \qquad (10.6)$$

Цей вираз являє собою спектр струму у параметричному конденсаторі. Спектр, крім складової на частоті сигнала $\omega_с$, включає також два бічних коливання з частотами $\omega_с-\omega_н$ і $\omega_с+\omega_н$.

10.3 Потужність , що споживається параметричним конденсатором

Перший доданок у виразі (10.6) перебуває в квадратурі з напругою сигнала по виразу (10.3) і не генерує активну потужність. Але, якщо обрати частоту накачки $\omega_н=2\omega_с$,то у виразі (10.6) з другого доданка з’являється складова

$$i(t)=-\frac{1}{2}\beta\omega_с C_0 U_m\sin(\omega_с t+\varphi_н-\varphi_с)$$

Миттєва потужність цієї складової

$$p(t) = u(t)i(t) = -\frac{1}{2}\beta\omega_с C_0 U_m^2 \sin(\omega_с t + \varphi_н - \varphi_с)\cos(\omega_с t + \varphi_н) =$$

$$= -\frac{1}{4}\beta\omega_с C_0 U_m^2 [\sin(2\omega_с t + \varphi_н) - \sin(2\varphi_с - \varphi_н)]$$

Середня потужність за період сигналу

$$P_{ср} = \frac{1}{T_с}\int_0^{T_с} p(t)dt = \frac{1}{4}\beta\omega_с C_0 U_m^2 \sin(2\varphi_с - \varphi_н) \qquad (10.7)$$

Формула (10.7) свідчить, що в залежності від співвідношення між початковими фазами джерела вхідного сигнала $\varphi_с$ і генератора накачки $\varphi_н$ значення середньої потужності $P_{ср}$ може бути як додатнім так і від'ємним. Тому при відповідному виборі кутів $\varphi_с$ і $\varphi_н$ можливий режим, коли конденсатор стає активним елементом, тобто постачає у коло потужність на частоті вхідного сигналу.

Позначимо кут $\varphi = 2\varphi_с - \varphi_н$. Тоді середня потужність по (10.7)

$$P_{ср} = \frac{1}{4}\beta\omega_с C_0 U_m^2 \sin\varphi = \frac{U_m^2}{2R_{вн}}, \qquad (10.8)$$

де

$$R_{вн} = \frac{2}{\beta\omega_с C_0 \sin\varphi} \; - \qquad (10.9)$$

-активний опір, що вноситься в коло. Звідси схема заміщення параметричного конденсатора, який керується джерелом накачки з подвоєною частотою сигналу, являє собою паралельне з'єднання ємності C_0 і опору $R_{вн}$ (рис 10.1).

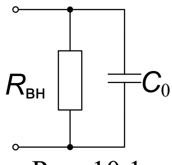


Рис. 10.1

Цей опір повинен бути від’ємним, щоб схема вела себе подібно генератору.

Провідність, внесена конденсатором

$$G_{\text{вн}} = \frac{1}{R_{\text{вн}}} = \frac{\beta\omega_{\text{с}} C_0 \sin\Phi}{2} \qquad (10.10)$$

Початкову фазу $\varphi_{\text{н}}$ генератора накачки слід підбирати такою, щоб $R_{\text{вн}}$ по (10.9) та $G_{\text{вн}}$ по (10.10) були від’ємними.

10.4. Одноконтурний параметричний підсилювач

Підсилення сигнала у параметричному підсилювачі відбувається за рахунок потужності, що передається в контур шляхом зміни реактивного параметра. Розрізняють два режими роботи такого підсилювача: синхронний та асинхронний (або бігармонічний). Синхронним називається режим, при якому частота накачки удвічі більша частоти сигналу, що підсилюється: $\omega_{\text{н}} = 2\omega_{\text{с}}$. Асинхронним називається режим, при якому синхронізм між коливаннями накачки та сигналу порушується, тобто коли $\omega_{\text{н}} \neq 2\omega_{\text{с}}$.

Розглянемо синхронний режим. Якщо вхідна напруга підсилювача змінюється по закону

$$u_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} \cos\omega t,$$

то при зміні ємності по закону (10.4), де для синхронного режиму $\omega_{\text{н}} = 2\omega_{\text{с}}$, в контур вноситься від’ємний опір.

На рис.10.2 наведена принципова схема одноконтурного параметричного підсилювача на варакторі.

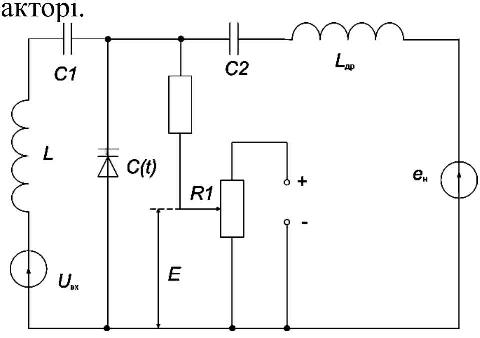


Рис. 10.2

Власне параметричним підсилювачем є контур, що складається з індуктивності L та варактора $C(t)$, на вхід якого подається вхідний сигнал $U_{вх}$. Накачка подається від джерела $e_н$ частоти $\omega_н$ через дросель $L_{др}$ з великою індуктивністю. Зміщення E подається від спеціального (звичайно з регулюванням) джерела сталої напруги через резистор R_2 з великим опором, щоб коло живлення не зменшувало добротність контура. Розподілюючі конденсатори C_1, C_2 великої ємності необхідні для запобігання замикання варактора по постійному струму через джерела сигнала і накачки: якщо їх не буде, постійна напруга на варакторі буде дорівнювати нулю. Напруга на варакторі утворюється обома діючими на схемі напругами: сигналом і накачкою.

Розглянемо генератор вхідного сигналу з частотою $\omega_с$, утворений паралельним з'єднанням ідеального джерела струму з амплітудою I_m, і елемента з активною провіднустю $G_г$. До генератора підключене резистивне навантаження з провідністю $G_н$ (рис. 10.3, а).

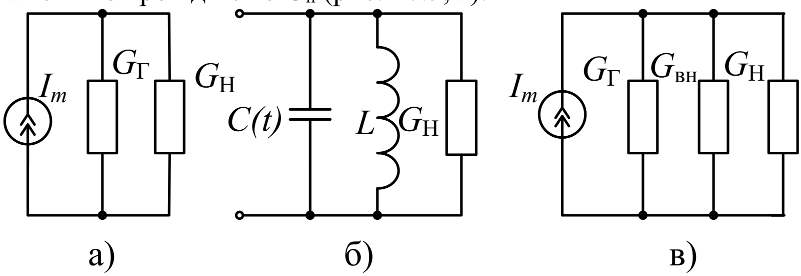


Рис. 10.3

Напруга на затисках генератора

$$U_m = \frac{I_m}{G_г + G_н}$$

Потужність в навантаженні

$$P_н = \frac{I_m^2 G_н}{2(G_г + G_н)^2}$$

Максимальна потужність в узгодженому режимі ($G_г = G_н$)

$$P_{\text{н}\,m} = \frac{I_m^2}{8G_{\text{г}}} \tag{10.11}$$

Потужність в навантаженні можливо збільшити. Для цього треба зменшити провідність генератора $G_{\text{г}}$, наприклад, шляхом паралельного ввімкнення параметричного конденсатора $C(t)$ по виразу (10.4). Схема заміщення параметричного конденсатора (варактора) включає паралельне з’єднання середнього значення ємності C_0 і внесеного опору $R_{\text{вн}}$, що вноситься параметричним конденсатором.

Схема параметричного підсилювача по рис. 10.2 може бути представлена спрощеною схемою по рис.10.3,б і еквівалентною схемою по рис. 10.3,в.

Індуктивність L разом з конденсатиром C_0, що входить в схему заміщення параметричного конденсатора $C(t)$, утворюють коливальний контур, настроєний на частоту вхідного сигналу ω_0 (рис.10.3,б). При резонансі опір цього контура дуже великий і практично не шунтує від’ємну внесену провідність $G_{\text{вн}}$ (рис. 10.3,в). Потужність в навантаженні $G_{\text{н}}$ в режимі узгодження, коли $G'_{\text{н}} = G_{\text{г}} + G_{\text{вн}} < G_{\text{г}}$, буде максимальною

$$P'_{\text{н}\,m} = \frac{I_m^2}{8(G_{\text{г}} + G_{\text{вн}})} \tag{10.12}$$

Відношення по (10.11), (10.12)

$$K_{p\,\text{ном}} = \frac{P'_{\text{н}\,m}}{P_{\text{н}\,m}} = \frac{G_{\text{г}}}{G_{\text{г}} + G_{\text{вн}}} \tag{10.13}$$

називають номінальним коефіцієнтом підсилення потужності.

Приклад:

При $G_{\text{г}}$ = 0,01 См, $G_{\text{вн}}$ = 0,008 См одержимо

$$K_{p\,\text{ном}} = \frac{0{,}01}{0{,}01 - 0{,}008} = 5\,,$$

або в логорифмічних одиницях

$$\Delta_{p\,\text{ном}} = 10\,\log 5 = 7\ \text{дБ}$$

Розглянемо асинхронний режим.

В реальних умовах важко а іноді і неможливо точно виконати умови синхронизму $\omega_{\text{н}} = 2\omega_{\text{с}}$. Якщо частота сигналу розстроєна відносно умови синхронізму, тобто $\omega_{\text{с}} = \dfrac{\omega_{\text{н}}}{2} + \delta\omega$, то говорять, що параметричний підсилювач працює в асинхронному режимі або в режим розстройки. При цьому кут Φ, який визначає внесений опір, залежить від часу

$$\Phi(t) = 2\varphi_{\text{с}} - \varphi_{\text{н}} + 2\delta\omega\, t$$

Отже внесений спір по виразу (10.9)

$$R_{\text{вн}} = \frac{2}{\beta\omega_{\text{с}} C_0 \sin\Phi(t)} \tag{10.14}$$

змінюється в часі і періодично набуває різні знаки. Звідси змінюється і рівень вихідного сигнала, форма якого має характер биття. Це серйозний недолік одноконтурного підсилювача.

Розглянемо стійкість параметричного підсилювача. Якщо від'ємна внесена провідність $G_{\text{вн}}$ варактора повністю компенсує суму провідності генератора $G_{\text{г}}$ та навантаження $G_{\text{н}}$, то параметричний підсилювач стає нестійким. Отже критичне значення провідності

$$G_{\text{вн.кр}} = -(G_{\text{г}} + G_{\text{н}}) \tag{10.15}$$

Фазові співвідношення сигнала і накачки будуть оптимальними, якщо

$$\Phi = 2\varphi_с - \varphi_н = -90^\circ, \qquad \sin\Phi = -1 \tag{10.16}$$

Тоді критична глибина модуляції ємності з виразів (10.11), (10.15)

$$\beta_{кр} = \frac{2(G_г + G_н)}{\omega_с C_0} \tag{10.17}$$

При $\beta > \beta_{кр}$ підсилювач збуджується.

10.5. Двохконтурний параметричний підсилювач

Для запобігання виникнення биття при асинхронному режимі одноконтурного підсилювача був створений так званий двохконтурний параметричний підсилювач, схема якого показана на рис.10.4.

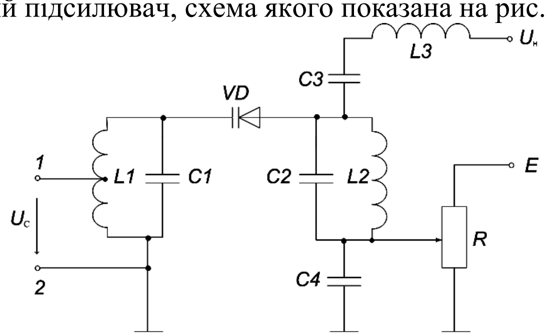


Рис. 10.4

Параметричний конденсатор реалізується бар'єрною ємністю напівпровіднокового діода (варактора) *VD*. Схема містить два коливальних контура *L*1*C*1 та *L*2*C*2, зв'язок між якими здіснюється нелінійним елементом *VD*.

Кола живлення такого підсилювача схожі з одноконтурним підсилювачем по рис.10.2. Постійна напруга, що визначає положення робочої точки по характеристиці діода *VD*, знімається з потенціометра *R*. Конденсатор *C*4 є блокуючим; його ємність велика у порівнянні з іншими ємностями схеми і не впливає на роботу схеми на високих частотах. Напруга модуляції параметричної ємності подається на нелінійний елемент *VD* від генератора накачки ($U_н$) через послідовний коливальний контур *L*3*C*3, настроєний на частоту накачки $\omega_н$.Для малого сигнала $u_{н}$ промодульована ємність варактора *VD* є параметричною.

Вхідний сигнал $u_{с}$ з частотою $\omega_{с}$ через затиски 1-2 котушки $L1$ надходить в перший контур $L1C1$ підсилювача, настроєного на частоту сигнала. Другий контур $L2C2$ настроюється на одну з комбінаційних частот $\omega_{с} + \omega_{н}$ чи $\omega_{с} - \omega_{н}$, які утворюються в результаті дії сигнала на параметричний конденсатор.

Еквівалентна схема двохконтурного параметричного підсилювача наведена на рис. 10.5.

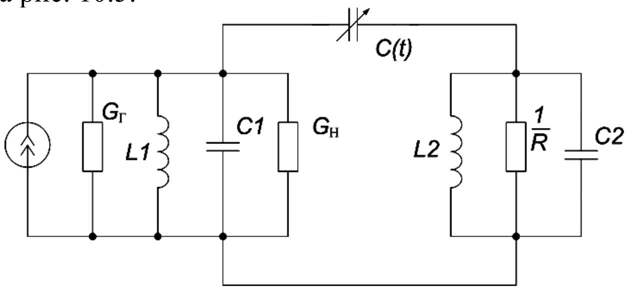


Рис. 10.5

Підсилювач складається з двох контурів, один з яких $L1C1$ називається сигнальним контуром і настроєний на частоту сигнала $\omega_{с}$, а другий $L2C2$ називається холостим контуром і настроєний на холосту частоту $\omega_{х} = \omega_{н} - \omega_{с}$. Зв’язок між контурами здійснюється через параметричну ємність $C(t)$, яка змінюється у часі з частотою накачки $\omega_{н}$.

$$C(t) = C_0(1 + \beta \cos \omega_{н} t) \qquad (10.18)$$

Добротності сигнального і холостого контурів вибираються великими. Тобто контури виділяють коливання тільки своїх частот.

$$\begin{cases} u_{с}(t) = U_{mс} \cos(\omega_{с} t + \varphi_{с}) \\ u_{х}(t) = U_{mх} \cos(\omega_{х} t + \varphi_{х}) \end{cases} \qquad (10.19)$$

Напруга на варакторі

$$u_{\text{в}} = u_{\text{с}} - u_{\text{х}} \tag{10.20}$$

Струм через варактор, ураховуючи вирази (10.18), (10.19), (10.20).

$$\begin{aligned} i(t) &= C(t)\frac{du_{\text{в}}}{dt} + u_{\text{в}}\frac{dC(t)}{dt} = \\ &= C_0(1+\beta\cos\omega_{\text{н}}t)\left[-\omega_{\text{с}}U_{m\text{с}}\sin(\omega_{\text{с}}t+\varphi_{\text{с}}) - \omega_{\text{х}}U_{m\text{х}}\sin(\omega_{\text{х}}t+\varphi_{\text{х}})\right] + \\ &+ \left[U_{m\text{с}}\cos(\omega_{\text{с}}t+\varphi_{\text{с}}) - U_{m\text{х}}\cos(\omega_{\text{х}}t+\varphi_{\text{х}})\right](-\beta\omega_{\text{н}}C_0\sin\omega_{\text{н}}t) \end{aligned} \tag{10.21}$$

У виразі (10.21) є добутки типу

$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right] \tag{10.22}$$

Отже у співвідношенні (10.21) є складові з частотою сигнала $\omega_{\text{с}} = \omega_{\text{н}} - \omega_{\text{х}}$,з холостою частотою $\omega_{\text{х}} = \left|\omega_{\text{н}} - \omega_{\text{с}}\right|$ і з комбінаційними частотами $\omega_{\text{с}} + \omega_{\text{н}}$ та $\omega_{\text{н}} + \omega_{\text{х}}$. Виділимо з виразу (10.21) складову струму на частоті сигнала $\omega_{\text{с}}$

$$\begin{aligned} i_{\text{с}}(t) &= -\omega_{\text{с}}C_0U_{m\text{с}}\sin(\omega_{\text{с}}t+\varphi_{\text{с}}) + \frac{1}{2}\beta\omega_{\text{с}}U_{m\text{х}}C_0\sin\left[\left(\omega_{\text{н}} - \omega_{\text{с}}\right)t - \varphi_{\text{с}}\right] = \\ &= -\omega_{\text{с}}C_0U_{m\text{с}}\sin(\omega_{\text{с}}t+\varphi_{\text{с}}) + \frac{1}{2}\omega_{\text{с}}\beta C_0U_{m\text{х}}\sin(\omega_{\text{с}}t - \varphi_{\text{х}}) \end{aligned} \tag{10.23}$$

Перший доданок у виразі (10.23) дає з першим рівнянням у (10.19) тільки реактивну потужність. Активну провідність ця компонента в контур не вносить. Другий доданок пропорційний амплітуді $U_{m\text{х}}$ напруги на холостому контурі. Знайдемо $U_{m\text{х}}$. Виділимо з виразу (10.21) корисну складову струму на холостій частоті $\omega_{\text{х}}$, пропорційну амплітуді $U_{m\text{с}}$

$$i_{\text{кх}}(t) = -\frac{1}{2}\beta\omega_{\text{х}}C_0U_{m\text{с}}\sin(\omega_{\text{х}}t - \varphi_{\text{с}}) = \\ = \frac{1}{2}\beta\omega_{\text{х}}C_0U_{m\text{с}}\cos(\omega_{\text{х}}t + \frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{с}}) \qquad (10.24)$$

Якщо $R_{\text{рез.х}}$ - резонансний опір холостого контура, то напруга на ньому

$$u_{\text{х}}(t) = i_{\text{k х}}(t)R_{\text{рез.х}} = -\frac{1}{2}\beta\omega_{\text{х}}C_0U_{m\text{с}}R_{\text{рез.х}}\sin(\omega_{\text{х}}t - \varphi_{\text{с}}) = \\ = \frac{1}{2}\beta\omega_{\text{х}}C_0U_{m\text{с}}R_{\text{рез.х}}\cos(\omega_{\text{х}}t + \frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{с}}) = U_{m\text{х}}\cos(\omega_{\text{х}}t + \varphi_{\text{х}}) \qquad (10.25)$$

Звідси амплітуда

$$U_{m\text{х}} = \frac{1}{2}\beta\omega_{\text{х}}C_0U_{m\text{с}}R_{\text{рез.х}} \qquad (10.26)$$

і фаза

$$\varphi_{\text{х}} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{с}} \qquad (10.27)$$

Підставимо (10.26), (10.27) у другий доданок виразу (10.24). Одержимо корисну складову струму на частоті сигнала, яка обумовлена впливом варактора і холостого контура

$$i_{\text{к.с}}(t) = \frac{1}{4}\beta^2\omega_{\text{с}}\omega_{\text{х}}C_0^{\,2}U_{m\text{с}}R_{\text{рез.х}}\cos(\omega_{\text{с}}t + \varphi_{\text{с}}) \qquad (10.28)$$

Струм $i_{\text{к.с}}(t)$, який вноситься послідовним з’єднанням варактора і холостого контура, співпадає по фазі з напругою $u_{\text{с}}$ сигнального контура по (10.19). Тобто в сигнальний контур вноситься активна потужність. Отже ця складова вносить в сигнальний контур активну і від’ємну провідність

$$G_{\text{вн}} = \frac{I_{\text{к.с.}m}}{\text{U}_{m\text{с}}} = -\frac{1}{4}\beta\omega_{\text{с}}\omega_{\text{х}}C_0R_{\text{рез.х}} \qquad (10.29)$$

Номінальний коефіцієнт підсилення розраховується за формулою (10.13). Аналіз стійкості аналогічний однократному підсилювачу.

Якщо порівняти внесену провідність у двохконтурному підсилювачі по (10.29) і одноконтурному по (10.10) то можна зазначити, що у двохконтурному підсилювачі внесена від'ємна провідність не залежить від початкових фаз сигнала і накачки ($\Phi = 2\varphi_{с} - 2\varphi_{н}$). Крім того, двохконтурний параметричний підсилювач не залежить від частот $\omega_{н}$ і $\omega_{с}$. Треба тільки, щоб $\omega_{н} > \omega_{с}$, тоді $\omega_{х} = \omega_{н} - \omega_{с} > 0$, тобто буде додатньою.

10.6. Баланс потужностей у багатоконтурних параметричних системах. Рівняння Менлі-Роу

Розглянемо загальну схему двохконтурної параметричної системи (рис. 10.6).

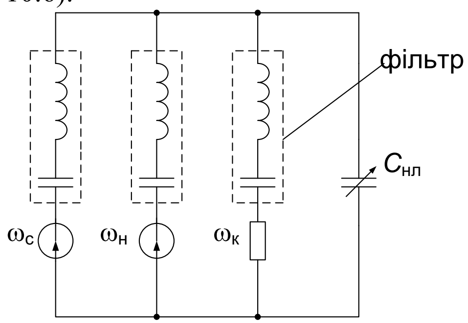


Рис. 10.6

На схемі паралельно нелінійному конденсатору *С*нл, який виконує роль параметричної ємності, ввімкнені три кола. Два з них мають джерела сигналу та накачки, третє коло – пасивне і утворює холостий контур, настроєний на комбінаційну частоту $\omega_{к} = m\omega_{с} + n\omega_{н}$ $(m, n -$ цілі числа, $\omega_{с}, \omega_{н} -$ кутові частоти генераторів сигнала і накачки. Кожне коло має високодобротний вузькосмуговий фільтр з частотами $\omega_{с}$, $\omega_{н}$, ω_{k}. Для спрощення вважаємо,що кола сигнала і накачки не мають втрат.

Розглянемо роботу схеми. Припустимо, що одне з джерел (сигнала чи накачки) відсутнє. Тоді складові з комбінаційними частотами ω_k не виникають. Струм холостого контура дорівнює нулю, у струмі нелінійного конденсатора не буде складових з комбінаційними частотами. Система не споживає потужності від джерела і поводить себе як реактивне коло.

Якщо ж діють обидва джерела, то з'являється складова струму на комбінаційній частоті. Цей струм протікає через коло холотого контура, резистивне навантаження якого споживає потужність, а в коло сигнала і накачки вносяться додатні та від'ємні опори, значення і знаки яких визначають перерозподіл потужностей між джерелами.

Система, що аналізується, замкнена (автономна). Отже, виходячи з закону збереження енергії, середні потужності сигнала, накачки і комбінаційних коливань зв'язані співвідношенням

$$P_{\text{с}} + P_{\text{н}} + P_{\text{к}} = 0 \tag{10.30}$$

Потужність за період коливань T

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = fE, \tag{10.31}$$

де f – частота. Тоді

$$f_{\text{с}}E_{\text{с}} + f_{\text{н}}E_{\text{н}} + f_{\text{к}}E_{\text{к}} = 0 \tag{10.32}$$

Тут $f_{\text{с}}$, $f_{\text{н}}$, $f_{\text{к}}$ - частоти сигнала, накачки і комбінаційна,
$E_{\text{с}}$, $E_{\text{н}}$, $E_{\text{к}}$ – енергії сигнала, накачки і комбінаційна (холостого контуру) відповідно.
Але

$$f_{\text{к}} = mf_{\text{с}} + nf_{\text{н}}$$

Тоді з виразу (10.32) одержимо

$$f_с(E_с + mE_к) + f_н(E_н + nE_к) = 0 \qquad (10.33)$$

Рівність (10.33) можлива тільки при

$$\begin{cases} E_с + mE_к = 0 \\ E_н + nE_к = 0 \end{cases} \qquad (10.34)$$

Через потужності

$$\begin{cases} \dfrac{P_с}{f_с} + \dfrac{mP_к}{mf_с + nf_н} = 0 \\ \dfrac{P_н}{f_н} + \dfrac{nP_к}{mf_с + nf_н} = 0 \end{cases} \qquad (10.35)$$

Рівняння (10.35) називаються рівняннями Менлі-Роу. Вони дозволяють доволі просто і наочно вивчати закономірності перетворення потужностей у багатоконтурних параметричних системах.

10.7 Двохконтурний параметричний підсилювач нерегенеративного типу

Приймемо в рівняннях (10.35) m=n=1. Тоді комбінаційна частота $f_к = f_с + f_н$ і рівняння (10.35) перетворюються у

$$\begin{cases} \dfrac{P_с}{f_с} + \dfrac{P_к}{f_с + f_н} = 0 \\ \dfrac{P_н}{f_н} + \dfrac{P_к}{f_с + f_н} = 0 \end{cases} \qquad (10.36)$$

Звичайно, потужність, що споживається навантаженням, вважається додатньою, потужність, що віддається генератором-від’ємною.

Зрозуміло, потужність кола холостого контура завжди додатня ($P_к>0$). Тоді в (10.36) $P_с<0$, $P_н<0$. Отже обидва джерела сигналу накачки віддають потужність холостому контуру. З (10.30) одержуємо $P_к=-P_с-P_н$. Тоді коефіцієнт підсилення на потужності з урахуванням рівнянь (10.36).

$$K_р=\frac{P_к}{-P_с}=\frac{-P_с-P_н}{-P_с}=1+\frac{P_н}{P_с}=1+\frac{f_нP_к(f_с+f_н)}{(f_с+f_н)f_сP_к}=$$
$$=1+\frac{f_н}{f_с}=\frac{f_к}{f_с} \qquad (10.37)$$

Аналогічно

$$\frac{P_н}{P_с}=\frac{f_н}{f_с} \qquad (10.38)$$

Тобто, відношення потужностей на різних частотах дорівнює відношенню частот (рис. 10.7, а).

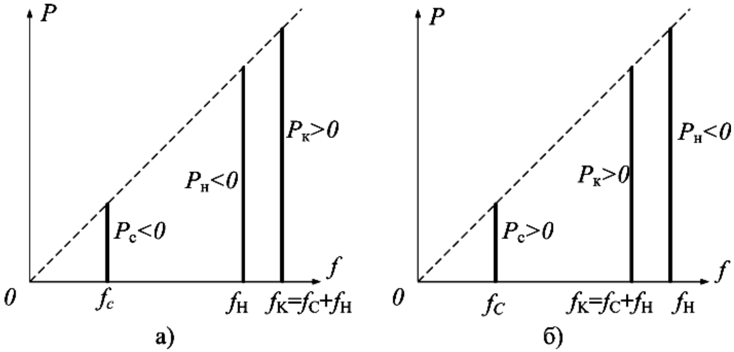


Рис. 10.7

Накачка не збільшує потужність на частоті сигнала $f_с$. Коливання з потужністю більше потужності вхідного сигнала можна одержати тільки на комбінаційній частоті $f_к = f_с + f_н$, тобто має місце підсилення з перетворенням частоти „вгору”. Недоліком є те, що частота підсиленого сигнала не дорівнює вхідній частоті. У надвисокочастотному діапазоні це викликає додаткові складнощі при подальшій обробці коливання.

У розглянутому підсилювачі відсутня регенерація, тобто компенсація втрат у вхідному контурі за рахунок енергії, що передається з другого кола. Тому цей підсилювач називається-підсилювач нерегенеративного типу.

Перевага підсилювача нерегенеративного типу полягає в тому, що у вхідному контурі сигнал не змінюється в залежності від потужності накачки.
Такий підсилювач стійкий і не здатний до самозбудження при будь-яких потужностях сигнала і накачки.

10.8 Двохконтурний параметричний підсилювач регенеративного типу.

Приймемо в рівняннях (10.35) m=-1, n=1. Тоді комбінаційна частота $f_к=f_н - f_с$ і рівняння (10.35) перетворюється у

$$\begin{cases} \dfrac{P_с}{f_с} - \dfrac{P_к}{f_с - f_н} = 0 \\ \dfrac{P_н}{f_н} + \dfrac{P_к}{f_с - f_н} = 0 \end{cases} \qquad (10.39)$$

З першого рівняння (10.39) виходить, що обідві потужності $P_с$ і $P_к$ – додатні ($P_с$>0 , $P_к$>0). Потужність $P_н$>0. Тобто частина потужності, що відбирається від генератора накачки, передається у холостий контур, а частина у сигнальний контур, отже в системі відбувається регенерація на частоті сигнала. Вихідну потужність можливо відбирати як із сигнального, так і з холостого контуру.

Чим більше потужність накачки, тим більше потужність коливань на частоті вхідного сигнала, тим більший від’ємний опір, що вноситься в сигнальний контур. Коли сумарний активний опір сигнального контуру стає від’ємним, то в контурі виникають коливання на його резонансній частоті. Тобто генератор стає нестійким і можливе його самозбудження.

У такому режимі відношення потужностей також дорівнює відношенню частот (рис 10.7, б).

Рівняння (10.39) не дають можливості визначити коефіцієнт підсилення, тому що потужність P_c включає в себе, як частину, що надходить від вхідних пристроїв, так і частину, що виникає завдяки регенерації.

10.9. Параметричне збудження коливань

У колах з реактивним нелінійним елементом завдяки дії генератора накачки можливе збудження електричних коливань. Розв'язання задачі виникнення автоколивань у параметричному контурі в загальній формі доволі складне. Тому обмежимся спрощеним підходом.

Процес виникнення коливань в схемі параметричного генератора, як і в схемі звичайного генератора, починається з флуктуації і амплітуди коливань на початку генерації дуже малі і їх вплив на параметри нелінійного елемента можна не враховувати. Параметри нелінійного елемента змінюються (модулюються) по періодичному закону тільки під впливом напруги накачки.

При аналізі процесів збудження замість нелінійного диференційного рівняння можна використовувати лінійне диференційне рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Розглянемо власні коливання в контурі з параметричним конденсатором (рис. 9.9). Диференційне рівняння власних коливань, складене по закону Кірхгофа для напруг, має вигляд

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C(t)}\int idt = 0 \qquad (10.40)$$

Розв'язок цього рівняння зручніше шукати не відносно стуму «i», а відносно заряду q на пластинах конденсатора

$$q = \int idt = C(t)u \qquad (10.41)$$

Тоді рівняння (10.40) перепишемо у формі

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C(t)}\int idt=0 \qquad (10.42)$$

Ємність параметричного конденсатора, яка модулюється по періодичному закону, зручно представити у формі

$$C(t)=\frac{C_0}{1+\beta\cos(\omega_{\text{Н}}t+\varphi_{\text{Н}})}, \qquad (10.43)$$

де: C_0 – середнє значення ємності; $\beta=\frac{|\Delta C|}{C_0}$ – глибина модуляції ємності; ΔC – максимальна зміна ємності; $\omega_{\text{Н}}$, $\varphi_{\text{Н}}$ – частота і фаза накачки.

Позначимо $\alpha=\frac{R}{2L},\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC_0}}$. тоді рівняння (10.40) запишеться у вигляді

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\alpha\frac{dq}{dt}+\omega_0^2\left[1+\beta\cos\left(\omega_{\text{Н}}t+\varphi_{\text{Н}}\right)\right]q=0 \qquad (10.44)$$

Це лінійне диференційне рівняння зі змінним (періодичним) коефіцієнтом. Воно відоме як рівняння Матьє. Для його розв’язання створені і протабульовані спеціальні функції, які також носять ім’я Матьє.

Лінійність рівняння (10.44) дає право стверджувати, що амплітуда власних коливань повинна змінюватись по експоненціальному закону. Тому розв’язок рівняння (10.44) записується у вигляді

$$q=Ae^{\gamma t}\cos\frac{\omega_{\text{Н}}}{2}t \qquad (10.45)$$

Аналіз рівняння (10.44) дає значення показника степеня γ і фази коливань накачки $\varphi_{\text{Н}}$.

$$\gamma_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\chi^2-\xi_{\text{Н}}^2}, \qquad (10.46)$$

$$\varphi_{\text{Н}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\chi^2 - \xi_{\text{Н}}^2}}{\xi_{\text{Н}}}, \qquad (10.47)$$

де: $\chi = \dfrac{\beta Q}{2}$ – узагальнена глибина модуляції ємності по (10.18),

$\xi_{\text{Н}} = \dfrac{\frac{\omega_{\text{Н}}}{2} - \omega_0}{\alpha}$ – узагальнена розстройка частоти накачки.

Рівняння (10.42) не враховує, що в реальному генераторі зростання коливань через нелінійні властивості елементів контура припиняється через деякий час. Настає стаціонарний режим.

Розглянемо схеми параметричних генераторів. Практичні схеми параметричних генераторів конструюють по балансним структурам, які завдяки своїй симетрії не пропускають на вихід коливання з частотою накачки і дозволяють знімати тільки коливання генерації. На схемі рис. 10.8 наведена схема ємнісного параметричного генератора.

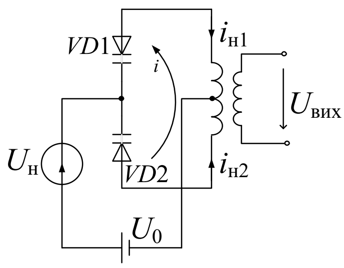


Рис. 10.8

Як нелінійний конденсатор на схемі використовується два напівпровідникових діода (варактора) *VD*1, *VD*2. Завдяки зустрічному вмиканню діодів напруга накачки $u_{\text{Н}}$ подається на них у фазі і їх ємності збільшуються або зменшуються одночасно. Загальна ємність складається з двох послідовно з'єднаних ємнісних *p*- *n*-переходів. Вихідна напруга, частота якої в два рази менша частоти накачки, знімається з вторинної обмотки високочастотного трансформатора, первинна обмотка якого слугує індуктивністю контура. Струми $i_{\text{н1}}, i_{\text{н2}}$ частоти накачки протікають через котушку зустрічно і при симетрії схеми не викликають напруги на вторинній обмотці. У свою чергу струм вихідної частоти замикається в контурі і не проходить у джерела живлення. Положення робочої точки на характеристиках діодів установлюється за допомогою джерела постійного зміщення U_0 .

На рис. 10.9 зображена схема параметричного генератора, в якому використовуються феритові осердя в якості параметричної індуктивності.

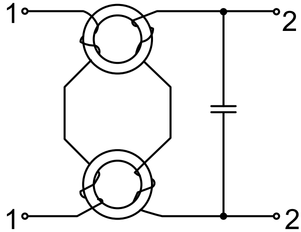


Рис. 10.9

Живлення генератора виконується через затиски 1-1 постійним і змінним струмами. За допомогою постійного струму встановлюється положення робочої точки на характеристиці нелінійної індуктивності. Змінний струм є струмом накачки, здійснює модуляцію параметра і змінює проникність осердя та величину індуктивності. Завдяки симетрії схеми з конденсатора (затиски 2-2) знімаються тільки коливання генератора, частота яких у два рази менша частоти накачки.

Приклад 10.1

Одноконтурний параметричний підсилювач працює на частоті 6 ГГц (довжина хвилі λ=5 см), генератор сигналу і навантаження мають однакові провідності 0,005 См ($R_{\text{Г}} = R_{\text{Н}} = 200$ Ом), ємність варактора C_0=0,8 пФ. Визначити граничні межі зміни ємності, при досягненні яких підсилювач самозбуджується.

Розв’язок.

По формулі (10,17) визначимо критичну глибину модуляції ємності варактора

$$\beta_{кр} = \frac{2(G_г - G_{н)}}{\omega_с C_0} = \frac{2(0.005 + 0.005)}{2\pi 6 \cdot 10^9 0.8 \cdot 10^{-12}} = 0.66$$

Таким чином, параметричний підсилювач самозбуджується, якщо ємність варактора, змінюючись у часі по гармонічному закону, коливається у межах від $C_{max} = C_0(1 + \beta_{кр}) = 0.8 \cdot 10^{-12}(1 + 0.66) = 1.33 \cdot 10^{-12} = 1.33\,пФ$

до $C_{min} = C_0(1 - \beta_{кр}) \cdot 0.8 \cdot 10^{-12}(1 - 0.66) = 0.27 \cdot 10^{-12} = 0.27\,пФ.$

Приклад 10.2

Ємність параметричного конденсатора змінюється в часі по закону $C(t) = 200 + 80\cos(10^5 t + \frac{\pi}{4}) + 40\cos 5 \cdot 10^5 t$, пФ. До конденсатора підведена напруга $u(t) = 30\cos 5 \cdot 10^6 t$. Знайти аналітичний вираз струму в конденсаторі.

Розв'язок.

В загальному випадку

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Заряд на конденсаторі

$$q(t) = C(t)u(t).$$

Тоді струм у конденсаторі

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dC(t)}{dt}u(t) + C(t)\frac{du(t)}{dt} =$$

$$\left\{80\left[-\sin\left(10^5 t + \frac{\pi}{4}\right)\right]10^5 + 40\left[-\sin\left(5 \cdot 10^5 t\right)\right] \cdot 5 \cdot 10^5\right\}30\cos 5 \cdot 10^6 t +$$

$$+\left[200 + 80\cos\left(10^5 t + \frac{\pi}{4}\right) + 40\cos\left(5 \cdot 10^5 t\right)\right]30\left(-\sin 5 \cdot 10^6 t\right)5 \cdot 10^6$$

Після виконання перетворень одежимо

$$i(t) = -5.38 \cdot 10^9 \sin\left(49 \cdot 10^5 t - \frac{\pi}{4}\right) - 6.12 \cdot 10^9 \sin\left(51 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$-3.3 \cdot 10^9 \sin\left(49 \cdot 10^5 t\right) - 2.7 \cdot 10^9 \sin\left(51 \cdot 10^5 t\right) + 30 \cdot 10^9 \sin\left(50 \cdot 10^5 t\right)$$

Тобто спектр струму конденсатора містить сумарні $(51\cdot 10^5\,\text{с}^{-1})$, різницеві $(49\cdot 10^5\,\text{с}^{-1})$ частоти та основну частоту коливань напруги $(50\cdot 10^5\,\text{с}^{-1})$.

Задачи

10.1 Параметрично активна провідність змінюється у часі по закону $G(t) = 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4}\cos(10^5 t) + 3\cdot 10^4\cos(2\cdot 10^5 t)$, См. До нелінійного елемента підведена напруга $U(t) = 5cos10^6 t$. Знайти амплітуду і частоти всіх складових струму. Побудуйте спектральну діаграму струму.

Відповідь :
$i(t) = 5\cdot 10^{-3}\cos(10\cdot 10^5 t) + 12{,}5\cdot 10^{-4}\cos(11\cdot 10^5 t) + 12{,}5\cdot 10^{-4}\cos(9\cdot 10^5 t) + 7{,}5\cdot 10^{-4}\cos(12\cdot 10^5 t) + 7{,}5\cdot 10^{-4}\cos(8\cdot 10^5 t)$

10.2 Параметричний підсилювач працює на частоті $\omega_c = 10^{11}c^{-1}$, коефіцієнт $\beta = 0{,}01$, середня ємність варактора $C_0 = 3\text{пФ}$, провідність навантаження $G_H = 2\cdot 10^{-3}\text{См}$, початкова фаза джерела сигналу $\varphi_c = 0$, початкова фаза генератора накачки $\varphi_H = \frac{\pi}{2}$. Знайти коефіцієнт підсилення потужності пристрою.

Відповідь : $K_p = 4$

10.3 Знайти критичне значення коефіцієнта модуляції β_{kp} ємності варактора, при якому параметричний підсилювач по задачі 10.2 опиняється на межі самозбудження.

Відповідь :

Примітка: прийняти генератор сигнала ідеальним, тобто $G_r = 0$

10.4 Визначити добротність коливального контура, який має індуктивність 100 мкГн та опір втрат 15 Ом, ємність конденсатора змінюється у часі по закону
$C(t) = 150 + 5cos1{,}63\cdot 10^7 t$

Відповідь : $Q = 55{,}4$

10.5 Ємність параметричного конденсатора, ввімкнутого у коливальний контур, змінюється у часі по закону $C(t) = 300 + 20\cos(5\cdot 10^6 t)$. При яких величинах індуктивності і добротності контура відбувається параметричне збудження системи, що супроводжується необмеженим зростанням амплітуди коливань? Чи є дане рішення єдиним?

Відповідь : $L = 530$ мкГн, $Q = 47$ Це рішення не єдине.

10.10. Методичні вказівки

Параметричні системи обов’язково мають у своєму складі допоміжне джерело коливань, яке керує параметрами елементів.

Параметричні енергоємні елементи при визначених умовах володіють властивістю відбирати енергію у коливань однієї частоти і віддавати її коливанням іншої частоти. На відміну від звичайних підсилювачів і генераторів, де енергія для підсилення відбирається від джерела постійної напруги, в параметричних підсилювачах і генераторах енергія надходить від місцевого генератора високочастотних коливань – генератора накачки.

Великі по амплітуді коливання генератора накачки змінюють (модулюють) по періодичному закону параметр реактивного нелінійного елемента. В результаті для малого сигналу, що підсилюється і який не викликає суттєвої зміни параметра, все коло можна вважати лінійним зі змінними параметрами.

При впливі на нелінійний реактивний елемент сумарної напруги сигналу і накачки в стаціонарному режимі утворюється спектр гармонік і коливання комбінаційних частот. Всі ці коливання безперервно обмінюються енергією: одні її втрачають, інші набувають. Обмін енергією підкорюється певним співвідношенням, які визначаються теоремою Менлі-Роу.

Частотні енергетичні співвідношення Менлі-Роу дозволяють аналізувати різні режими перетворення коливань в параметричних підсилювачах. Це перетворення «вгору» з підсиленням, коли сигнал перетворюється у коливання більш високої комбінаційної частоти. При цьому джерело сигналу витрачає на створення комбінаційного коливання меншу потужність, ніж потужність у навантаженні. Основна доля потужності комбінаційного коливання споживається від генератора накачки. Другий режим – це «вниз» - без підсилення. При цьому комбінаційна частота менша, ніж частота сигналу. Генератор сигналу втрачає свою потужність не тільки на створення комбінаційного коливання, а й на створення потужності, яка тепер споживається в генераторі накачки. Третій режим – це режим перетворення «вниз» з підсиленням. При цьому частота накачки вища, ніж частота сигналу. Цей режим використовується найбільш часто. Схема поглинає енергію тільки від генератора накачки і перетворює її в енергію комбінаційного сигналу і коливання. Джерело сигнала не тільки не витрачає своєї потужності в процесі взаємодії коливань на нелінійному конденсаторі, а й навпаки збільшує потужність свого вхідного джерела.

При аналізі режимів параметричного збудження в параметричних генераторах складається лінійне диференційне рівняння зі змінним (періодичним) коефіцієнтом – рівняння Матьє. Розв'язок цього рівняння дає значення областей частот вхідного сигналу і генератора накачки, в яких можливі самозбудження генератора.

При розгляді схем параметричних генераторів треба зауважити, що всі вони будуються по балансним структурам і на вихід генератора не попадають ні коливання генератора накачки, ні постійна напруга зміщення.

Питання для самоперевірки

1. Яка властивість параметричних кіл дозволяє створювати параметричні підсилювачі?
2. Де застосовуються параметричні підсилювачі?
3. Яким елементом реалізується параметричний конденсатор?
4. Яким чином реалізується параметрична індуктивність?
5. Запишіть вираз для параметричної ємкості, яка змінюється по періодичному закону.
6. Які гармоніки з‘являються у струмі параметричної ємності, що перебуває під впливом періодичного гармонічного сигнала?

7. Запишіть вираз для внесеного опору та провідності, яка генерується у коливальному контурі з параметричною ємністю.
8. Зобразьте схему одноконтурного підсилювача.
9. За рахунок чого можна можна збільшити потужність вхідного сигналу у одноконтурному підсилювачі з параметричним конденсатором?
10. Запишіть вираз для номінального коефіцієнта підсилення у одноконтурному параметричному підсилювачі.
11. Що таке асинхронний і синхронний режим у одноконтурному параметричному підсилювачі?
12. Назвіть недоліки одноконтурного параметричного підсилювача.
13. Зобразіть схему двохконтурного параметричного підсилювача.
14. Запишіть вираз для внесеної провідності двохконтурного параметричного підсилювача.
15. За рахунок чого генерується від'ємна внесена провідність у двохконтурному параметричному підсилювачі?
16. Назвіть переваги двохконтурного параметричного підсилювача.
17. Запишіть рівняння Менлі-Роу для двохконтурного параметричного підсилювача.
18. Поясніть роботу двохконтурного параметричного підсилювача нерегенеративниого типу.
19. Поясніть роботу двохконтурного параметричного підсилювача регенеративного типу.
20. Запишіть рівняння Матьє для параметричного генератора.
21. Запишіть вираз для розв'язку рівняння Матьє.
22. Зобразьте схему ємнісного параметричного генератора.
23. Зобразьте схему індуктивного параметричного генератора.

Глава 11
Розрахунок нелінійних кіл

11.1 Задача розрахунку нелінійних кіл

В загальному вигляді задачу розрахунку нелінійних кіл можна сформулювати наступним чином: задана схема кола з характеристиками елементів, а також напруги і струми джерел енергії; треба найти напруги і струми віток або елементів кола. Розв'язок поставленої задачі зводиться до складання і розв'язку рівнянь заданого кола.

Точний аналітичний розв'язок задачі можливий тільки в окремих випадках простих нелінійних кіл з визначеними характеристиками елементів.

Відомі наступні загальні методи розрахунку нелінійних кіл:

1) метод складання рівнянь кола і їх чисельного розв'язку;
2) метод перетворення кола із застосуванням графічних побудов;
3) метод аналізу і розрахунку послідовних кусково-лінійних еквівалентних схем.

Області застосування кожного з перелічених методів визначаються насамперед постановою конкретної задачі і мети розрахунку, а також конфігурацією кола.

В переважній більшості практичних задач розрахунку нелінійних кіл конфігурація кола не буває доволі складною: у колі, як правило, діє одне джерело змінного сигналу і треба визначити реакцію кола в одній або двох вітках. Тому типова задача розрахунку нелінійних кіл полягає в наступному: на вході кола діє джерело змінного сигналу $f_1(t)$. Треба знайти реакцію кола $f_2(t)$ у вигляді напруги чи струму на вході чи виході кола.

Якщо шуканою величиною є реакція на вході, то нелінійне коло можна розглядати як нелінійних двохполюсник. Якщо шуканою величиною є реакція на виході, то нелінійне коло можна розглядати як нелінійних трьохполюсник.

Для знаходження шуканої реакції на вході чи виході як функції часу $f_2(t)$ необхідно спочатку знайти вхідну вольтамперну

характеристику двохполюсника або передаточну характеристику чотирьохполюсника.
Вхідні та передаточні характеристики можна зняти експериментально. Дуже суттєвим для аналізу широкого класу нелінійних кіл є можливість визначення їх вхідних та передаточних характеристик без складання систем рівнянь аналогічно методу еквівалентних перетворень лінійних схем.

11.2 Нелінійні кола постійного струму

В колах постійного струму в усталеному режимі всі величини не змінюються у часі і система рівнянь, що описує процеси в схемі стає лінійною або нелінійною алгебраїчною системою.
Для розрахунку нелінійних кіл постійного струму застосовують графічні, ітераційні та аналітичні методи.
Графічні методи відрізняються особливою наочністю. Результати графічних методів дають достатню точність. Недолік: графічні методи не дозволяють одержать розв'язок у загальній формі.
Ітераційні методи полягають у розумному виборі передбаченого розв'язку і подальшому поліпшенні результату. Але цей метод достатньо трудомісткий і у більшості випадків не є наочним, хоча відрізняється великою точністю.
Аналітичні методи також мало наочні. Вони базуються на більш-менш точній апроксимації нелінійної залежності і характеризуються значною трудомісткістю, а точність у більшості випадків не перевищує графічні методи. Основною перевагою аналітичних методів є те, що вони дають розв'язок в загальній формі. Але аналітичні методи приводять до нелінійних рівнянь, чи систем рівнянь, які розв’язуються чисельними методами, в результаті чого втрачається загальність результатів.
На практиці буває корисним спільне використання аналітичних ті графічних методів.
При розрахунку складних кіл корисно виконати їх спрощення. Так коло, що складається з декількох послідовних нелінійних елементів R1, R2 (рис. 11.1, а) з вольамперними характеристиками 1,2 по рис. 11.1, б може бути замінене одним

нелінійним елементом з результуючою вольтамперною характеристикою(3).

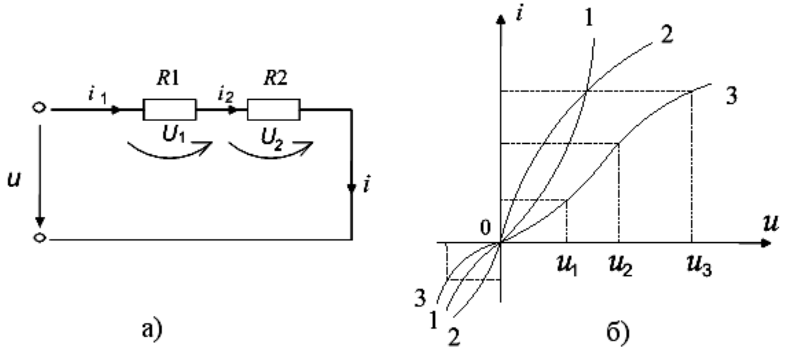


Рис. 11.1

Тут $i_1 = f(u_1), i_2 = f(u_2)$, де $i_1 = i_2 = i, u_1 = u_2 = u$. Коло, що складається з декількох нелінійних елементів $G1$, $G2$ (рис.11.2, а) з вольтамперними характеристиками 1,2 на рис. 11.2, б може бути замінене одним нелінійним елементом з результуючою вольт амперною характеристикою (3).

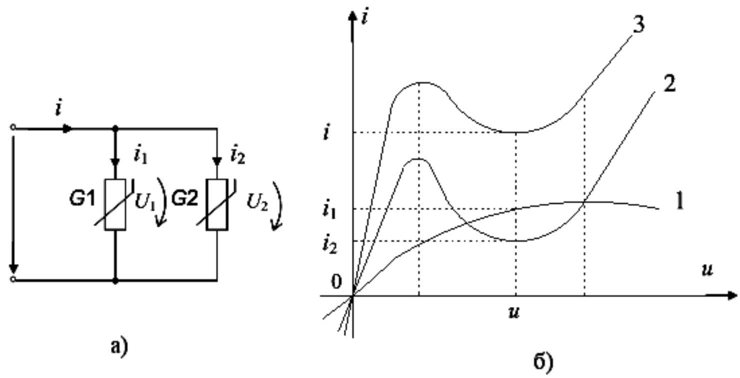


Рис. 11.2

Тут на основі дуальних співвідношень $i_1 + i_2 = i,\ u_1 + u_2 = u$.

Спрощення схем може бути досягнуто використанням теореми компенсації і застосуванням відомих методів еквівалентних перетворень. Розглянемо приклад мостової схеми (рис. 11.3, а). Відповідно до теореми компенсації замінимо напругу між точками *a-b* еквівалентною ЕРС $E_{екв} = E - IR6$.

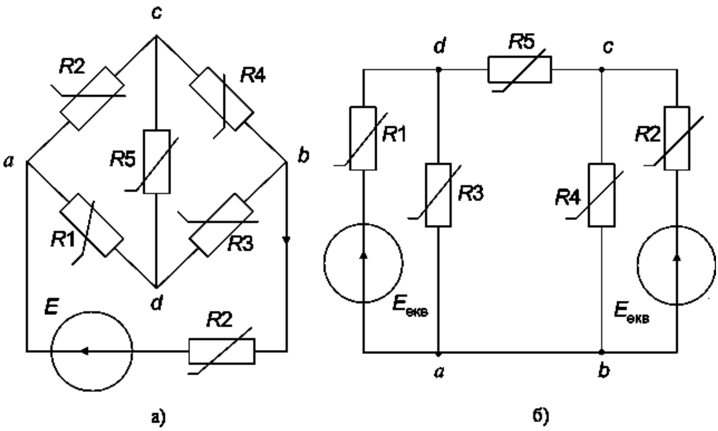


Рис. 11.3

Далі за правилом переносу джерел ЕРС $E_{екв}$ перенесена у всі вітки, що відходять від одного з вузлів (на рис. 11.3, б – від вузла *а*). В результаті вузли «*a*» і «*b*» стають еквіпотенціальними і можуть бути з'єднані в один вузол. Схема значно спрощується для розрахунків (рис. 11.3, б).

Якщо в схемі (рис. 11.3,а) ввімкнені ЕРС в інші витки і всі елементи, крім *R*6, лінійні, то доцільно застосування теореми про еквівалентний генератор. Тоді струм *I* у нелінійному елементі визначається по формулі

$$I = \frac{U_{\text{хх}}}{R6 + R_{\text{вн}}},$$

де $U_{\text{хх}}$ – напруга між розімкненими затисками нелінійного елемента $R6, R_{\text{вн}}$ – внутрішній опір еквівалентного генератора – опір між розімкненими затисками *a*-*b*. Величини $U_{\text{хх}}, R_{\text{вн}}$ розраховуються відомими методами.

Метод еквівалентного генератора може бути корисним також при розрахунку схем з двох і більше віток з нелінійними елементами, але частіше всього він поєднується з методом еквівалентних перетворень.

Комбінація аналітичного і графічного методів розрахунку використовується у методі послідовних наближень. Найбільше розповсюдження одержали два алгоритми уточнення розв'язку систем нелінійних функціональних рівнянь: 1) метод простої ітерації; 2) метод Ньютона-Рафсона.

Розглянемо метод простої інтерації для розв'язку функціонального рівняння *F(x)*=0. Виділимо з лівої частини величину x і представимо це рівняння у формі $F_1(x) = x$. Приймемо грубо неточне значення кореня x_0 і підставимо його в ліву частину. Одержимо значення лівої частини $F_1(x_0)$, яке відрізняється від x_0. Значення $F_1(x_0) = x_1$ приймається за нове уточнене значення кореня і знову підставляється у $F_1(x)$. Одержують нове уточнене значення кореня $x_2 = F_1(x_1)$. Якщо різниця між наступним і попереднім уточненим значенням кореня зменшується, то така операція продовжується доти, поки ця різниця $x_{n+1} - x_n$ не стане менше деякого малого умовного значення.

На рис. 11.4, а графічно показаний процес уточнення кореня до точного значення x^*.

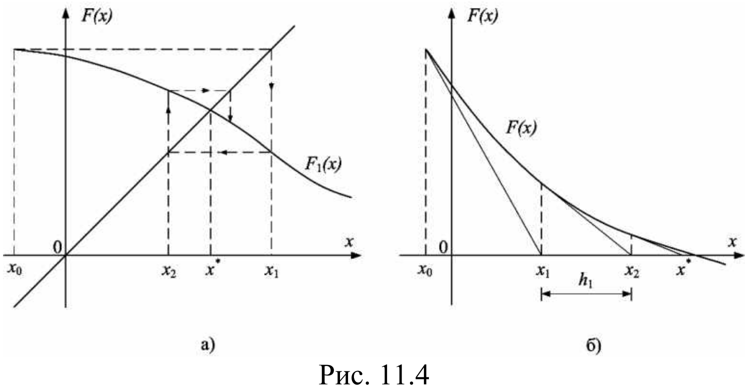


Рис. 11.4

Розглянемо метод Ньютона-Рафсона. При цьому також уточнення значення кореня виконується послідовними кроками. Але функцію *F(x)* розкладають в ряд Тейлора, в якому обмежуються тільки лінійними членами. Якщо на кожному кроці одержано значення кореня x_k, то його підставляють в ряд Тейлора для одержання наступного уточненого значення кореня

$$F(x_{k+1}) \approx F(x_k) + \frac{dF(x_k)}{dx} h_k, \qquad (11.1)$$

де $h_k = x_{k+1} - x_k$ – приріст змінної.

Якщо уточнене значення кореня близьке до істинного, при якому (11.1) спрямовується до 0, то наближені значення шуканого приросту кореня

$$h_k = -\frac{f(x_k)}{F^{'}(x_k)} \qquad (11.2)$$

Нове уточнене значення кореня

$$x_{k+1} = x_k + h_k = x_k - \frac{F(x_k)}{F^{'}(x_k)} \qquad (11.3)$$

Підрахунки по виразу (11.3) проводяться доти, поки приріст h_k не стане менше деякого заздалегідь обраного значення.

Геометрична ілюстрація метода Ньютона-Рафсона наведена на рис. 11.4, б. Дотична до графіка *F(x)* у точці x_k перетинає вісь *x* у точці x_{k+1}. Різниця $x_{k+1} - x_k = h_k$ дає поправку. Перетин дотичної у точці x_{k+1} до функції *F(x)* дає нове значення кореня і т.д.

Требі зазначити, що метод Ньютона-Рафсона забезпечує більш швидку збіжність, ніж метод простої ітерації.

11.3 Нелінійні кола змінного струму

Для дослідження усталених режимів в нелінійних колах змінного струму існують два шляхи. Якщо елементи кола інерційні, то при синусоїдній ЕРС в усталеному режимі струми і напруги також синусоїдні. Тому при розрахунку кіл можна використати методи комплексного числення і векторні діаграми. Якщо, навпаки, елементи безінерційні, то струми і напруги в загальному випадку несинусоїдні. Методи комплексного числення і векторні діаграми в цьому випадку можуть бути використані умовно, якщо несинусоїдні величини можливо замінити еквівалентними синусоїдними. Це перший підхід до розв'язку, тобто розрахунок з еквівалентними синусоїдними величинами дозволяє визначити тільки основні залежності між

складовими основних гармонік і дає можливості оцінити перетворення, які виникають в нелінійних колах. Цей шлях можливий, якщо складові основних гармонік переважають у колі.
Можливість повного дослідження нелінійних кіл змінного струму полягає у складанні і безпосередньому розв'язку нелінійних диференційних рівнянь. Цей метод дозволяє визначити поведінку кола як в усталеному так і в перехідному режимах.

11.4 Складання диференційних рівнянь нелінійних кіл

Одержання системи рівнянь складних нелінійних кіл в загальному вигляді являє доволі непросту задачу. При цьому важливе значення має вибір змінних, що однозначно визначають поведінку кола. Якщо в якості змінних прийняти напруги та (або) струми довільно обраних віток, то перехід від рівнянь з'єднань кола, складених по законам Кірхгофа, і рівнянь елементів до системи диференційних рівнянь може виявитися доволі ускладненим.
Вибір змінних впливає на форму системи рівнянь. Від форми системи рівнянь і фізичного змісту обраних змінних суттєво залежить аналіз кола та відповідних розв’язків. Тому адекватний вибір найменшого числа незалежних змінних, що повністю визначають поведінку нелінійного кола, має важливе значення при аналізі нелінійних кіл. Найбільш раціональним є вибір системи змінних, яка приводила б до системи рівнянь у так званій нормальній формі. Систему рівнянь у нормальній формі називають також системою рівнянь стану, а змінні, що входять в систему рівнянь стану, змінними стану. Змінні стану можна визначити як систему найменшого числа незалежних величин, необхідних і достатніх для повного визначення при заданих впливах і початкових умовах (в момент t_0) поведінки кола, тобто напруг і струмів всіх її віток для будь якого моменту $t > t_0$.
Рівняння стану – це система диференційних рівнянь в нормальній формі (формі Коші). Вона складається з рівнянь

першого порядку, що розв'язані відносно перших похідних: у лівій частині рівняння маємо перші похідні від кожної змінної, а у правій – функції змінних стану і діючі у колі сигнали. Ця форма рівнянь є основною, найбільш ефективною формою опису нелінійних кіл, що пояснюється наступними обставинами: 1) зведення системи рівнянь, що записані відносно вузлових напруг контурних струмів, до одного рівняння для обраної змінної зв'язано з великими труднощами не завжди можливе; 2) змінним стану можна надати дуже корисну геометричну наочність, якщо розглядати їх як координатні вісі у n-вимірному просторі стану – розв'язок рівнянь стану буде представлено траєкторією відображеної точки у цьому просторі, а проекції цієї точки на вісі координат стають значеннями кожної змінної стану; 3) алгоритм чисельного аналізу нелінійних кіл записується для систем диференційних рівнянь в нормальній формі; 4) незалежні початкові умови задаються у вигляді зарядів (напруг) ємності та потокозчеплень (струмів) індуктивності тому відпадає необхідність у визначенні залежних початкових умов.

Вибір змінних стану залежить від виду характеристик ємнісних та індуктивних елементів. Якщо L- і C – елементи задані характеристиками $\psi(i)$ та $q(u)$ і ці характеристики немонотонні, а керуються відповідно струмом і напругою, то в якості змінних стану доцільно приймати струм i_L і напругу u_C, тому що обернення характеристик призводить до багатозначних функцій. Якщо ж немонотонні характеристики задані у вигляді $u(q)$ і $i(\psi)$, тобто керуються зарядом і потокозчепленням відповідно, то за змінні стану треба приймати заряди ємностей потокозчеплення індуктивностей.

У випадку суворо монотонних характеристик реактивних елементів за змінні стану можна приймати як заряди і потокозначення, так і напруги ємностей і струми індуктивностей. З точки зору чисельних методів розв'язку рівнянь стану перевагу треба віддавати заряду і потокозчепленю.

Розглянемо складання рівнянь стану у припущенні наступних умов: 1) у колі відсутні вироджені контури з джерел напруги – автономних і неавтономних – і вироджені перетини з джерел струму – автономних і неавтономних; 2) у колі відсутні ємнісні контури та індуктивні перетини; 3) характеристики нелінійних елементів задані однозначними функціями.

Система рівнянь стану складається на основі: 1) рівнянь елементів і 2) рівнянь з'єднань (топологічних рівнянь).

Рівняння елементів – це вольтамперна $u=f(i)$, кулон-вольтна $q=f(u)$ та веберамперна $\psi = f(i)$ характеристики.

Рівняння з'єднань складають у наступному порядку:

1) для заданої схеми кола складають напрямлений граф, на якому виділяють ребра дерева і хорди. Ребрами обираються вітки з джерелами напруги та ємнісні вітки, а також резистивні вітки, вітки з джерелом струму і решта резистивних віток;

2) для кожного ребра дерева позначають головний перетин і записують систему рівнянь по закону Кірхгофа для струмів (ЗКС);

3) для кожної хорди позначають головний контур і записують систему рівнянь по закону Кірхгофа для напруг (ЗКН);

4) за допомогою еквівалентних перетворень вилучають із складених рівнянь струми і напруги резистивних віток. В результаті залишаються система рівнянь першого порядку у формі Коші: в лівій частині записуються похідні першого порядку від змінних стану, в правій частині – функції змінних стану та напруги і струми джерел.

11.5. Рівняння стану нелінійних кіл

Розглянемо рівняння стану для різних динамічних кіл.

11.5.1. Лінійне коло першого порядку

Для прикладу складання рівнянь стану спочатку розглянемо лінійне коло першого порядку (рис. 11.5, а). Виділимо резистивне підколо з джерелом U_0 і індуктивний елемент, струм i_L якого приймемо за змінну стану. Заміна індуктивності струмом i_L дає еквівалентну схему 11.5, б.

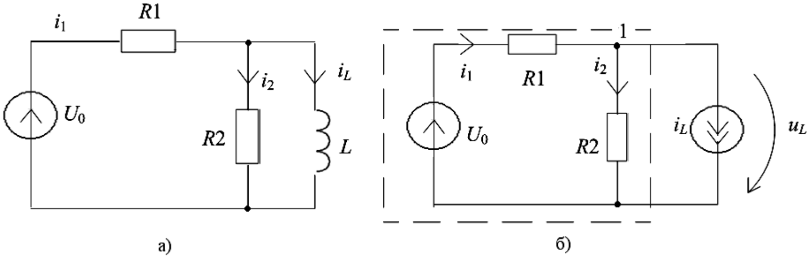


Рис. 11.5

По ЗКС для вузла 1

$$i_1 - i_2 - i_L = 0$$

Або

$$i_1 - i_2 = i_L = G1(u_0 - u_L) - G2u_L = G1u_0 - (G1 + G2)u_L$$

Звідси напруга

$$u_L = \frac{U_0 - R1i_L}{1 + R1G2}$$

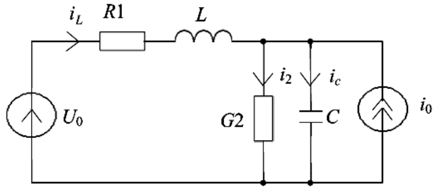
З $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$, одержуємо рівняння стану кола

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{(G1 + G2)} i_L + \frac{1}{(1 + R1G2)L} U_0 \tag{11.4}$$

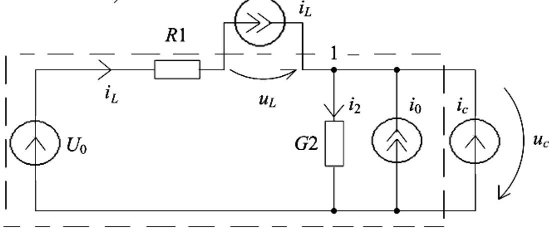
Права частина лінійного рівняння стану (11.4) складається з двох доданків: перший залежить від змінної стану i_L, а другий – від вхідного сигналу U_0. Тому коефіцієнт при першому доданку називають параметром стану кола, а коефіцієнт при другому – параметром впливу.

11.5.2. Лінійне коло другого порядку

Схема кола наведена на рис. 11.6, а. Виділимо індуктивність *L* і ємність *C*, залишиться резистивне підколо (пунктирний прямокутник на рис. 11.6, б).



а)



б)

Рис. 11.6

Індуктивність L і ємність C замінюємо джерелом струму i_L та напруги u_C відповідно. Величини i_L та u_C - змінні стану.

По ЗКН для вхідного контура одержуємо

$$R1i_L + u_L + u_C - U_0 = 0$$

Звідси

$$u_L = -R1i_L - u_C + U_0$$

По ЗКС для вузла 1 маємо

$$i_L - G2u_C + i_0 - i_C = 0$$

Звідси

$$i_C = i_L - G2u_C + i_0$$

Маючи на увазі, що $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}, i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$, одержуємо систему рівнянь стану

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{R1}{L}i_L - \dfrac{1}{L}u_C + \dfrac{1}{L}U_0, \\ \dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{1}{C}i_L - \dfrac{G2}{L}u_C + \dfrac{1}{C}i_0 \end{cases} \qquad (11.5)$$

Права частина системи (11.5) включає як змінні стану i_L, u_C, так і зовнішні впливи $U_{0,} i_0$.

11.5.3 Нелінійне коло першого порядку

Коло, яке складається з нелінійного опору $R1$, лінійного опору $R2$ і нелінійної ємності *C*, що підключені до джерела напруги, наведена на рис. 11.7, а.

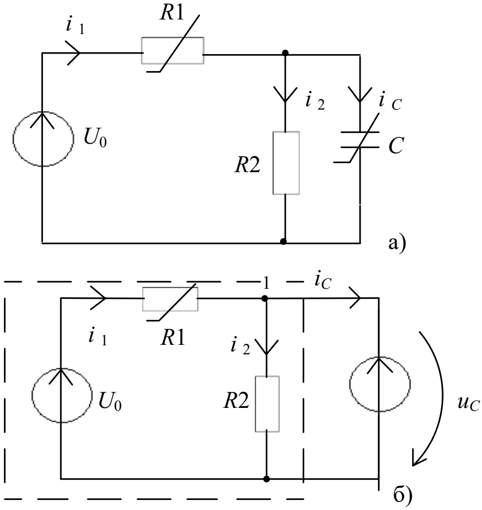


Рис. 11.7

Приймемо, що характеристики нелінійного опору і нелінійної ємності мають вигляд

$$\begin{cases} u_1 = k_1 i_1^3, \\ q_C = k_C u_C^{\frac{1}{3}}. \end{cases} \tag{11.6}$$

На еквівалентній схемі (рис. 11.7, б) ємність замінена джерелом напруги u_C. Величина u_C - змінна стану.

По ЗКН для лівого контура (рис. 11.7, б)

$$u_1(i_1) + u_C - U_0 = 0.$$

Звідси

$$u_1(i_1) = k_1 i_1^3 = U_0 - u_C \tag{11.7}$$

Струм i_1 з (11.7)

$$i_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{k_1}(U_0 - u_C)}$$

По ЗКТ для вузла 1

$$i_1 - i_2 - i_C = 0 \tag{11.8}$$

Тепер з виразів (11.7), (11.8) маємо

$$i_C = i_1 - i_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{k_1}(U_0 - u_C)} - \frac{u_C}{R_2} \tag{11.9}$$

Динамічна ємність

$$C(u_C) = \frac{dq_C}{du_C} = \frac{1}{3}k_C u_C^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}k_C \sqrt[3]{\frac{1}{u_C^2}} \tag{11.10}$$

Рівняння стану, маючи на увазі, що $i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C(u_C)} i_C = \frac{3}{k_C}\sqrt[3]{\frac{1}{k_1}u_C^2(U_0 - u_C)} - \frac{3}{k_C R2}\sqrt[3]{u_C^5} \tag{11.11}$$

11.5.4. Нелінійне коло другого порядку

Послідовний RLC – коливальний контур підключений до джерела напруги u_0. Він містить лінійний опір, ємність та нелінійну індуктивність з вебер-амперною характеристикою $i(\psi)$ (рис. 11.8).

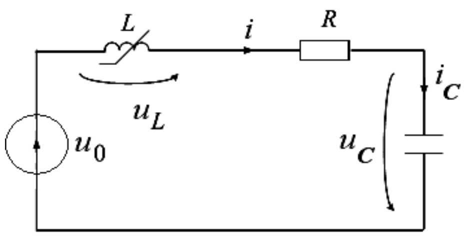


Рис. 11.8

Змінні стану в схемі це напруга на ємності u_C і потокозчеплення індуктивності ψ.

Очевидно

$$u_L - Ri + u_C - u_0 = 0, \quad i = i(\psi) = i_C \qquad (11.12)$$

Тоді з виразів (11.12) рівняння стану записується у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{dt} = -Ri(\psi) - u_C + u_0 \\ \dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{1}{C} i(\psi) \end{cases} \qquad (11.13)$$

Звідси одержуємо рівняння другого порядку відносно потокозчеплення ψ

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + R\frac{di_\psi}{dt} + \frac{du_C}{dt} - \frac{du_0}{dt} = 0$$

Або

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + R\frac{di_\psi}{dt} \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{C} i(\psi) = \frac{du_0}{dt} \qquad (11.14)$$

Якщо, наприклад нелінійна функція $i(\psi)$ апроксимована поліномом третього степеня

$$i(\psi) = a_1\psi + a_3\psi^3,$$

то з співвідношення (11.14) одержимо рівняння

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + R(a_1\psi + 3a_3\psi^3)\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{C}(a_1\psi + a_3\psi^3) = \frac{du_0}{dt} \qquad (11.15)$$

У колі без втрат $(R = 0)$ маємо

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{C}(a_1\psi + a_3\psi^3) = \frac{du_0}{dt} \qquad (11.16)$$

Якщо в контурі ввімкнена нелінійна ємність з характеристикою у вигляді полінома третього степеня

$$u_C = u_C(q) = a_1 q + a_3 q^3,$$

то одержимо рівняння стану

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_C(q) = \frac{Ld^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + a_1 q + a_3 q^3 = u_0. \qquad (11.17)$$

Це рівняння називають рівнянням Дуффінга.

11.5.5. Лінійне коло першого порядку з неавтономним джерелом струму

Схема кола зображена на рис 11.9, а. Виділимо резистивну частину кола після заміни ємності C джерелом напруги u_4 (рис. 11.9, б).

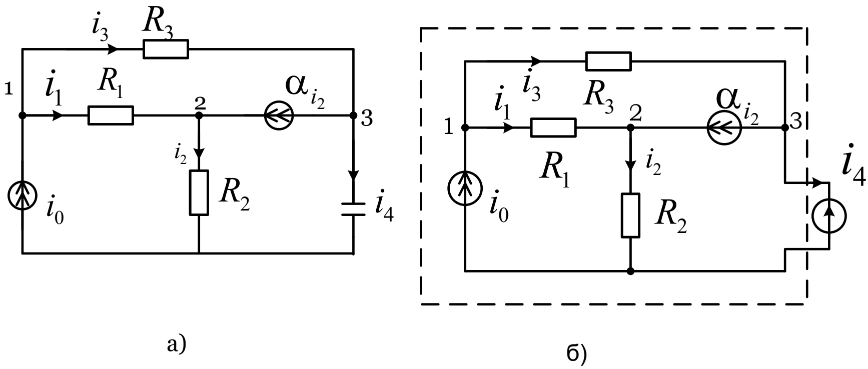


Рис. 11.9

Для вузла 2 по ЗКС одержимо

$$i_1 - i_2 + \alpha i_2 = 0, i_1 = (1-\alpha) i_2 .$$

Для вузла 1 по ЗКС одержимо

$$i_0 - i_1 - i_3 = i_0 - (1-\alpha) i_2 - i_3 = 0 . \qquad (11.18)$$

Звідки маємо

$$i_3 = i_0 - (1-\alpha) i_2 .$$

Для контура $R3 - u_4 - R2 - R1$ по ЗКН одержимо

$$i_3 R3 + u_4 - i_2 R2 - i_1 R1 = 0 .$$

Підставимо сюди вирази для струмів i_1, i_3, одержимо

$$i_2 = \frac{u_C + i_0 R3}{R2 + (1-\alpha)(R_1 + R3)}$$

Для вузла 3 по ЗКС

$$i_3 + \alpha i_2 - i_4 = 0$$

Підставивши вирази для i_2 та i_3, маємо струм ємності

$$i_C = i_0 - \frac{u_C + i_0 R3}{R2 + (1-\alpha)(R1 + R3)}$$

При $R3 \to \infty$, тобто при відсутньому опорі $R3$, одержимо

$$i_C = \frac{-\alpha i_0}{1-\alpha}$$

Рівняння стану

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_0 - \frac{u_C + i_0 R3}{R2 + (1-\alpha)(R1 + R3)}\right] \qquad (11.19)$$

При $R3 \to \infty$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{-\alpha\, i_0}{(1-\alpha)C} \qquad (11.20)$$

11.6. Розв'язок рівняння стану

Для аналізу нелінійних кіл треба розв'язати систему нелінійних рівнянь стану

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2 \ldots x_{n,}\, t) \text{ при } i\text{=1, 2…}n \qquad (11.21)$$

Час t у правій частині обумовлений впливом зовнішнього джерела змінного сигналу (кола зі змінними параметрами не розглядаються).

Розв'язок систем нелінійних диференційних рівнянь являє собою вельми складну задачу. Як правило, точний розв'язок рівнянь нелінійних кіл в аналітичній формі, за винятком окремих найпростіших випадків, неможливий. Відомі методи аналізу нелінійних кіл можна розділити на якісні і наближені кількісні методи.

До якісних методів можна віднести метод побудови траєкторії розв’язку рівнянь у просторі стану (метод фазового простору). Але цей метод можливо використовувати тільки для кіл першого та другого порядку.

До наближених кількісних методів належать: чисельний, кусково-чисельний та графічний методи розв’язку рівнянь.

Чисельні методи дозволяють за допомогою комп’ютерів одержати розв'язок будь-якого числа рівнянь стану. Вони використовують алгоритми наближеного чисельного інтегрування диференційних рівнянь, які зводять розв'язок рівнянь до скінченного числа арифметичних операцій. Чисельні методи застосовуються до систем рівнянь, що мають єдиний розв'язок.

11.6.1. Чисельний алгоритм Ейлера

Для прикладу наведемо один з найпростіших алгоритмів – неявний алгоритм Ейлера. Він застосовується для чисельного розв’язку диференційного рівняння $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$. Алгоритм Ейлера базується на розбитті часу на рівні малі інтервали Δt і послідовному обчисленні значення розв’язку на кожному інтервалі. У неявному алгоритмі Ейлера використовують наближене представлення похідної на $(k+1)$-му кроці

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = f(x_{k+1}, t_{k+1}) \tag{11.22}$$

Звідси

$$x_{k+1} = x_k + f\left(x_{k+1}, t_{k+1}\right)\Delta t$$

Наприклад, для ємнісного елемента

$$\frac{du}{dt} = \frac{i}{C(u)},$$

де $C(u) = \frac{dq(u)}{du}$ – динамічна ємність.

Для моменту $t = t_{k+1}$ це рівняння можна по виразу (11.22) записати у вигляді різницевого рівняння

$$u_{k+1} = u_k + \frac{i_{k+1}\,\Delta t}{C(u_{k+1})}.$$

Звідси

$$i_{k+1} = \frac{C(u_{k+1})}{\Delta t}(u_{k+1} - u_k) = q_{k+1}(u_{k+1}),$$

де

$$q_{k+1} = \frac{C(u_{k+1})}{\Delta t}\left(1 - \frac{u_k}{u_{k+1}}\right) - \tag{11.23}$$

– еквівалентна нелінійна провідність на (κ+1)-му кроці, що залежить від напруги на цьому кроці.

Тобто при чисельному аналізі нелінійна ємність на кожному кроці може бути представлена як нелінійний елемент з провідністю q_{k+1}.

Аналогічно може бути записаний нелінійний опір, за допомогою якого може бути представлена нелінійна індуктивність $L(i)$

$$r_{k+1} = \frac{L(i_{k+1})}{\Delta t}\left(1 - \frac{i_k}{i_{k+1}}\right) \tag{11.24}$$

При чисельному аналізі кола кожний реактивний елемент замінюється наведеними величинами. В результаті одержується нелінійна дискретна модель динамічного кола. Обчислення повинні проводитись послідовно крок за кроком. На кожному кроці треба проводити аналіз резистивного нелінійного кола з використанням розглянутого раніше алгоритму Ньютона-Рафсона.

Дискретні моделі дозволяють уникати трудомісткої процедури складання рівнянь стану складних динамічних кіл.

11. 6. 2. Кусково-лінійний метод

Кусково-лінійний метод базується на заміні нелінійних характеристик кусково-лінійним представленням, тобто приводить до лінеаризації кола, до якого можна застосувати апарат теорії лінійних кіл. Цей метод може бути використаний для аналіза широкого класу нелінійних кіл.

Кусково-лінійне представлення характеристик нелінійних елементів може бути використане для одержання послідовних кусково-лінійних еквівалентних схем. Кусково-лінійна еквівалентна схема для кожної лінеаризованої ділянки характеристики може бути замінена лінійним резистивним елементом і джерелом сталої напруги чи струму. Метою одержання кусково-лінійного кола є визначення вхідної і передаточної характеристик.

На прикладі (11.2) можливо з‘ясувати основні моменти аналізу нелінійних резистивних кіл методом послідовних кусково-лінійних схем в поєднанні з графічним представленням характеристик розв‘язку.

11.6.3. Якісний метод

При аналізі систем рівнянь стану доволі часто необхідно знати загальні властивості розв’язків рівнянь досліджуваних систем. Це можна зробити за допомогою якісних досліджень. Основний метод якісного аналізу полягає у побудові фазових траєкторій у *n*-мірному просторові стану.

Координатами цього простору є параметри стану x_1, x_2. Цей метод називають методом площини стану. Він використовується головним чином для дослідження процесів в автономних системах другого порядку, що можуть бути описані двома рівняннями стану

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad (11.24)$$

Час є незалежною змінною, не повинен явно входити у праву частину, тобто виключаються елементи зі змінними параметрами та змінні сигналу.

Суть методу площини стану полягає в побудові кривих взаємної залежності змінних стану $x_2 = \varphi(x_1)$ на фазовій площині x_1, x_2 та визначення їх характеристик на основі геометричних або топологічних властивостей графіків.

Крива залежності $x_2 = \varphi(x_1)$ називається траєкторією і починається з точок $x_1(0), x_2(0)$ при $t = 0$ і закінчується у точках рівноваги при $t \to \infty$. У точках рівноваги системи (11.24) похідні змінних стану дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \qquad (11.25)$$

В загальному випадку таких точок рівноваги (особливих точок) може бути кілька. Тобто таких траєкторій також може бути кілька і вони утворюють сім'ю траєкторій, що називається фазовим портретом.

Вивчення геометричної картини чи топології фазового портрета дозволяє одержати всі основні властивості розв'язків системи нелінійних рівнянь, що описують поведінку автономної нелінійної системи.

Для прикладу побудуємо траєкторії власних коливань (без зовнішнього впливу) у лінійному колі другого порядку – простому послідовному коливальному *RLC*- контурі.

Рівняння рівноваги напруг у контурі

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=0 .$$

Перепишемо це рівняння для заряду $q\left(i=\dfrac{dq}{dt}\right)$ при параметрах $R=1;L=0.5;C=1$

$$\frac{d^2q}{dt}+2\frac{dq}{dt}+2q=0 \qquad (11.26)$$

Прийнявши для змінних стану напругу на ємності u_C та струм в індуктивності i, запишемо рівняння (11.26) у формі рівняння стану

$$\begin{cases}\dfrac{du_C}{dt}=i\\ \dfrac{di}{dt}=-2u_C-2\end{cases} \qquad (11.27)$$

Характеристичне рівняуння для (11.26)

$$p^2+2p+2=0$$

Його корені: $p_{1,2}=-1\pm j$.

Тоді розв'язок рівнянь стану (11.27)

$$\begin{cases} i=[I_0\cos t-(2U_0-I_0)\sin t]e^{-t},\\ u_C=[U_0\sin t+(U_0-I_0)\cos t]e^{-t}, \end{cases} \qquad (11.28)$$

де I_0, U_0 - нормовані початкові (при $t=0$) струм в індуктивності і напруга на ємності. При $t \to \infty$ струм i та напруга u_C затухають до нуля, що задовольняє рівнянню (11.25).

Тепер можливо побудувати відповідні траєкторії. На рис 11.10, а зображені графіки залежності струму і напруги на ємності по виразам (11.28) від часу при $I_0 = 1, U_0 = 1$, що являють собою синусоїди, які затухають по експоненті.

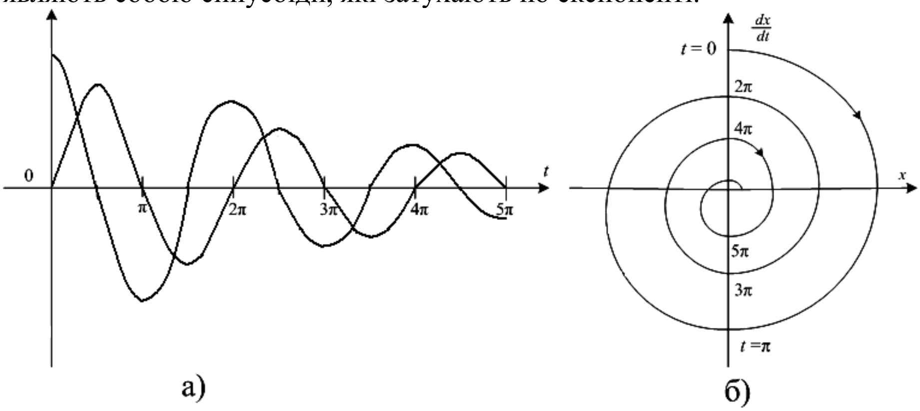


Рис. 11.10

Якщо взяти ординати обох графіків для різних моментів часу і нанести їх на фазову площину, то одержимо фазову траєкторію (рис. 11.10, б). Тут значення часу для окремих точок відіграють роль параметра. Траєкторія у вигляді спіралі від початкової точки $I_0 = 1, U_0 = 0$ направлена до початку координат – точки рівноваги вільного режиму, яка буде досягнута при $t \to \infty$.

Розглянутий приклад стосується лінійної системи з відомим розв'язком. Для нелінійних систем розв'язок рівнянь стану звичайно невідомий. Тому задача полягає у наближеній побудові траєкторій, по яким можна виявити основні властивості розв'язків. Рівняння траєкторій можливо одержати, якщо розділити друге рівняння (11.24) на перше.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \qquad (11.29)$$

Це диференційне рівняння, що виражає тангенс кута нахилу дотичної у відповідних точках траєкторій, на жаль, у більшості випадків аналітично не може бути розв'язане.

11.7. Спеціальні методи аналізу

11.7.1. Лінійна схема заміщення нелінійного чотирьохполюсника

Розглянемо керований нелінійний елемент – транзистор. Його можна представити як чотирьохполюсник, у якого порт 1 приймається як вхід, а порт 2 – вихід (рис. 11.11).

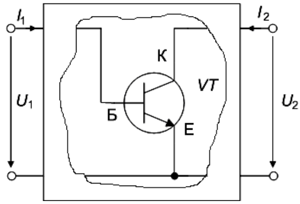


Рис. 11.11

Напруги U_1, U_2 та струми I_1, I_2 на затисках портів зв'язані між собою нелінійними рівняннями стану

$$\begin{cases} I_1 = F_1(U_1, U_2) \\ I_2 = F_2(U_1, U_2) \end{cases} \tag{11.30}$$

Величини, що входять в рівняння (11.30) являють собою суми деяких постійних рівнянь, що задані джерелами зміщення, і малих відхилень, що обумовлені сигналами на вході і виході.

$$\begin{cases} I_1 = I_{10} + i_1, \quad U_1 = U_{10} + u_1, \\ I_2 = I_{20} + i_2, \ \ U_2 = U_{20} + u_2 \end{cases} \tag{11.31}$$

Розкладемо вирази (11.31) в ряд Тейлора і візьмемо тільки доданки першого порядку відносно напруг u_1, u_2

$$\begin{cases} I_1 = F_1(U_{10}, U_{20}) + \dfrac{\partial F_1}{\partial U_1} u_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial U_2} u_2, \\ I_2 = F_2(U_{10}, U_{20}) + \dfrac{\partial F_2}{\partial U_{21}} u_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial U_2} u_2 \end{cases} \tag{11.32}$$

Тут частинні похідні беруться в робочій точці з координатами U_{10}, U_{20}.

З рівностей (11.32) одержуємо рівняння лінійної схеми заміщення нелінійного чотирьохполюсника через Y -параметри

$$\begin{cases} i_1 = Y_{11}u_1 + Y_{12}u_2, \\ i_2 = Y_{21}u_1 + Y_{22}u_2, \end{cases} \tag{11.33}$$

де

$$Y_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial U_1} \approx \frac{\Delta I_1}{\Delta U_1}\bigg|_{U_2=U_{20}} - \tag{11.34}$$

– вхідна провідність для малого сигналу в режимі короткого замикання по змінній складовій на виході, тобто при $u_2 = 0$;

$$Y_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial U_2} \approx \frac{\Delta I_1}{\Delta U_2}\bigg|_{U_1=U_{10}} - \tag{11.35}$$

– взаємна провідність зворотної передачі при короткому замиканні джерела сигналу на вході, тобто при $u_1 = 0$;

$$Y_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial U_1} \approx \frac{\Delta I_2}{\Delta U_1}\bigg|_{U_2=U_{20}} - \tag{11.36}$$

– взаємна провідність прямої передачі при короткому замиканні джерела сигналу на виході, тобто при $u_2 = 0$;

$$Y_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial U_2} \approx \frac{\Delta I_2}{\Delta U_2}\bigg|_{U_1=U_{10}} - \tag{11.37}$$

– вихідна провідність в режимі короткого замикання на вході, тобто при $u_1 = 0$.

Система (11.33) описує нелінійний чотирьохполюсник в системі Y -параметрів. Можна записати систему нелінійних рівнянь стану у формі

$$\begin{cases} U_1 = F_1(I_1, U_2) \\ I_2 = F_2(I_1, U_2) \end{cases} \tag{11.38}$$

Зважаючи на співвідношення (11.31), розкладемо вирази (11.38) в ряд Тейлора

$$
\begin{cases}
U_1 = F_1(I_{10}, U_{20}) + \dfrac{\partial F_1}{\partial I_1} i_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial U_2} u_2, \\
I_2 = F_2(U_{10}, U_{20}) + \dfrac{\partial F_2}{\partial I_1} i_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial U_2} u_2
\end{cases} \tag{11.39}
$$

Тут частинні похідні беруться в робочій точці з координатами I_{10}, U_{20}.

З рівностей (11.39) одержуємо рівняння лінійної схеми заміщення нелінійного чотирьохполюсника через *H*-параметри

$$
\begin{cases}
u_1 = H_{11} i_1 + H_{12} u_2, \\
i_2 = H_{21} i_1 + H_{22} u_2,
\end{cases} \tag{11.40}
$$

де

$$
H_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial I_1} \approx \frac{\Delta U_1}{\Delta I_1}\bigg|_{U_2 = U_{20}} - \tag{11.41}
$$

- вхідний опір в режимі короткого замикання на виході, тобто при u_2=0;

$$
H_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial U_2} \approx \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2}\bigg|_{I_1 = I_{10}} - \tag{11.42}
$$

- коефіцієнт зворотної передачі за напругою при холостому ході на вході, тобто при i_1=0;

$$
H_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial I_1} \approx \frac{\Delta I_2}{\Delta I_1}\bigg|_{U_2 = U_{20}} \tag{11.43}
$$

- коефіцієнт прямої передачі за струмом при короткому замиканні на виході, тобто при u_2=0;

$$
H_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial U_2} \approx \frac{\Delta I_2}{\Delta U_2}\bigg|_{I_1 = I_{10}} \tag{11.44}
$$

- вихідна провідність в режимі холостого ходу на вході, тобто при i_1=0;

H – параметри називають гібридними параметрами.

На практиці використовуються системи рівнянь чотирьохполюсника в *Z* – параметрах

$$
\begin{cases}
u_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2, \\
i_2 = z_{21} i_1 + z_{22} u_2,
\end{cases} \tag{11.45}
$$

в A – параметрах

$$\begin{cases} u_1 = A_{11}u_2 + A_{12}i_2, \\ i_1 = A_{21}u_1 - A_{22}i_2, \end{cases} \tag{11.46}$$

в B – параметрах

$$\begin{cases} u_2 = B_{11}u_1 - B_{12}i_1, \\ i_2 = B_{21}u_1 - B_{22}i_1, \end{cases} \tag{11.47}$$

в G – параметрах

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}i_2, \\ u_2 = G_{21}u_1 + G_{22}i_2, \end{cases} \tag{11.48}$$

Формули для переходу від одних параметрів до інших наведенні в таблиці 11.2

Табл. 11.2

	Y	Z	A	B	H	G
Y	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{Z} & \frac{Z_{12}}{Z} \\ \frac{Z_{21}}{Z} & \frac{Z_{11}}{Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & -\frac{A}{A_{12}} \\ -\frac{1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B_{11}}{B_{12}} & -\frac{1}{B_{12}} \\ -\frac{B}{B_{12}} & \frac{B_{22}}{B_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{H_{11}} & -\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{H}{H_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{G}{G_{22}} & \frac{G_{12}}{G_{22}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & \frac{1}{G_{22}} \end{matrix}$
Z	$\begin{matrix} \frac{Y_{11}}{Y} & -\frac{Y_{12}}{Y} \\ -\frac{Y_{21}}{Y} & \frac{Y_{22}}{Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{A}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B_{22}}{B_{21}} & \frac{1}{B_{21}} \\ \frac{B}{B_{21}} & \frac{B_{11}}{B_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ -\frac{H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{G_{11}} & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ \frac{G_{21}}{G_{11}} & \frac{G}{G_{11}} \end{matrix}$
A	$\begin{matrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{Y_{12}}{Y} \\ \frac{Y_{21}}{Y} & \frac{Y_{22}}{Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B_{11}}{B} & \frac{B_{12}}{B} \\ \frac{B_{21}}{B} & \frac{B_{22}}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{H}{H_{21}} & -\frac{H_{11}}{H_{21}} \\ -\frac{H_{22}}{H_{21}} & -\frac{1}{H_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{G_{21}} & \frac{G_{22}}{G_{21}} \\ \frac{G_{11}}{G_{21}} & \frac{G}{G_{21}} \end{matrix}$
B	$\begin{matrix} -\frac{Y_{11}}{Y_{12}} & -\frac{1}{Y_{12}} \\ -\frac{Y}{Y_{12}} & -\frac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{Z_{12}} & \frac{Z}{Z_{12}} \\ \frac{1}{Z_{12}} & \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{22}}{A} & \frac{A_{12}}{A} \\ \frac{A_{21}}{A} & \frac{A_{11}}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{H_{12}} & \frac{H_{11}}{H_{12}} \\ \frac{H_{22}}{H_{12}} & \frac{H}{H_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{G}{G_{12}} & -\frac{G_{22}}{G_{12}} \\ -\frac{G_{11}}{G_{12}} & -\frac{1}{G_{12}} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{Y}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{A}{A_{22}} \\ -\frac{1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B_{12}}{B_{11}} & \frac{1}{B_{11}} \\ \frac{B}{B_{11}} & \frac{B_{21}}{B_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{G_{22}}{G} & -\frac{G_{12}}{G} \\ -\frac{G_{21}}{G} & \frac{G_{11}}{G} \end{matrix}$
G	$\begin{matrix} \frac{Y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Z_{11}} & -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{Z}{Z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{21}}{A_{11}} & -\frac{A}{A_{11}} \\ \frac{1}{A_{11}} & \frac{A_{12}}{A_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{Y_{12}} & \frac{Y_{22}}{Y_{12}} \\ \frac{Y_{22}}{Y_{12}} & \frac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{H_{11}}{H} & -\frac{H_{12}}{H} \\ -\frac{H_{21}}{H} & \frac{H_{22}}{H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix}$

На практиці всі коефіцієнти визначають графічно з характеристик електронних напівпровідникових приладів, що наводяться у довідниках.

У прикладі 11.4 виведені співвідношення для перерахунку Y – параметрів для різних схем ввімкнення транзистора.

Обчислення параметрів однієї системи в параметри іншої системи виконується по алгоритму:

1) записати рівняння чотирьохполюсника через одну систему параметрів;

2) розв’язати цю систему відносно величин, що входять в ліву частину рівнянь чотирьохполюсника у другий системі параметрів;

3) підставити знайдені величини в рівняння чотирьохполюсника у другій системі параметрів;

4) з одержаного співвідношення записати вираз для параметрів другої системи;

11.7.2. Параметри нелінійних багатополюсників

Електронні приклади – транзистори, інтегральні мікросхеми – в мало сигнальному режимі являють собою лінійні багатополюсні елементи (БП). Електромагнітний стан БП можна характеризувати струмами і напругами полюсів відносно деякого базисного вузла. Для струму будь-якого вузла можна записати

$$i_k = Y_{k1}U_1 + Y_{k2}U_2 + \dots + Y_{kn}U_n, \qquad k = 1,2,\dots,n \qquad (11.44)$$

Коефіцієнти Y_{ik} називаються Y-параметрами багатополюсника і можуть бути записані у вигляді матриці Y-параметрів

$$Y = \begin{vmatrix} Y_{11}Y_{12}\dots Y_{1N} \\ Y_{21}Y_{22}\dots Y_{2N} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{N1}Y_{N2}\dots Y_{NN} \end{vmatrix} \qquad (11.50)$$

Тобто n-полюсник згідно з (11.50) має n^2 параметрів. Можна показати, що

$$\sum_{k=1}^{n} Y_{ki} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} Y_{ik} = 0 \qquad (11.51)$$

З співвідношень (11.51) витікає, що n-полюсник має $(n-1)^2$ незалежних параметрів.

Вирази (11.51) дозволяють переходити від параметрів БП відносно одного полюса до параметрів другого полюса. Для цього матрицю, складену відносно n-го полюса, що має $n-1$ рядків і $n-1$ стовпців, треба доповнити елементи n-го рядка і n-го стовпця, утворивши таким чином невизначену або особливу матрицю. Щоб створити нову матрицю відносно, наприклад, k-го полюса, треба з особливої матриці вилучити k-й рядок і k-й стовпець, створивши таким чином вкорочену або неособливу матрицю параметрів БП зі спільним k-м полюсом.

Матрицю провідностей схеми з багатополюсником складають за таким алгоритмом:

1) від схеми відключають усі багатополюсники і для решти схеми складають матрицю вузлових провідностей пасивної схеми $Y_П$;
2) складають особливі матриці Y-параметрів усіх багатополюсників, привласнивши їхнім рядкам і стовпцям номера тих вузлів схеми, до яких підключені відповідні полюси багатополюсників;
3) підсумовують елементи матриці пасивної схеми з елементами матриць багатополюсників, розташованих в рядках і стовпцях з однаковими номерами.

У прикладі (11.5) розраховано коефіцієнт підсилення по напрузі транзисторного каскаду з використанням наведеного алгоритму.

11.7.3. Аналіз схем з залежними джерелами

У малосигнальному режимі електронні прилади можна заміщувати лінійними схемами із залежними джерелами. Розглянемо транзисторний підсилювальний каскад, малосигнальна схема якого зображена на рис. 11.12, а, спрощена схема заміщення – на рис. 11.12, б. Складемо рівняння цієї схеми по методу вузлових напруг.

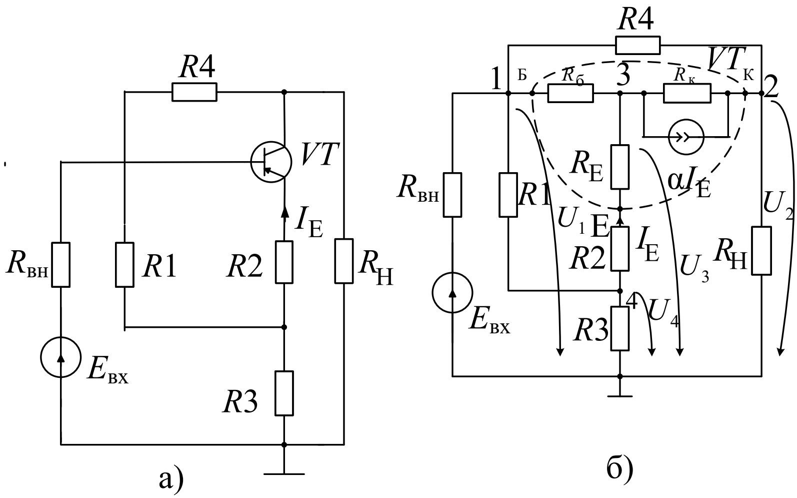


Рис. 11.12

Матриця провідностей пасивної частини схеми складається відомим способом.

$$
Y_{\text{П}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad \end{array} \\
\left| \begin{array}{cccc}
Y_{\text{вн}} + Y_1 + Y_4 + Y_{\text{Б}} & -Y_4 & -Y_{\text{Б}} & -Y_1 \\
-Y_4 & Y_4 + Y_{\text{Н}} + Y_{\text{К}} & -Y_{\text{К}} & 0 \\
-Y_{\text{Б}} & -Y_{\text{К}} & Y_{\text{Б}} + Y_{\text{К}} + \dfrac{1}{R2 + R_{\text{Е}}} & -\dfrac{1}{R2 + R_{\text{Е}}} \\
-Y_1 & 0 & -\dfrac{1}{R2 + R_{\text{Е}}} & Y_1 + Y_3 + \dfrac{1}{R2 + R_{\text{Е}}}
\end{array} \right| \end{array}
\qquad (11.52)
$$

Запишемо струм залежного джерела $\alpha I_{\text{Е}}$ через вузлові напруги

$$
\alpha I_{\text{Е}} = \alpha \frac{U_4 - U_3}{R2 + R_{\text{Е}}} = \frac{\alpha}{R2 + R_{\text{Е}}} U_4 - \frac{\alpha}{R2 + R_{\text{Е}}} U_3 \qquad (11.53)
$$

Джерело струму ввімкнене між вузлами 2 і 3 схеми заміщення. Тобто в рядках 2 і 3 матриці (11.52) повинні бути додаткові провідності $\dfrac{\alpha}{R_2 + R_{\text{Е}}}$ з (11.53) . Ці провідності зв'язані з вузлами 3, 4 схеми заміщення. Тобто вони повинні бути додатковими у стовпцях 3 і 4. Розглянемо знаки додаткових провідностей. В системі рівнянь в матричній формі, складеної по методу вузлових струмів, вузлові струми записуються у правій частині системи. Причому знак «+» ставиться, якщо струм джерела струму направлений до вузла, знак «$-$», якщо від вузла. При переносі вузлового струму у ліву частину знаки змінюються на зворотні. Отже знаки коефіцієнтів перед вузловими напругами U_3, U_4, які мають розмірність провідностей і повинні бути додані у відповідні рядки і стовпці матриці (11.52), визначаються по правилу: якщо струм джерела струму направлений до вузла, що ідентифікується з відповідним рядком q, і вузлова напруга вузла p, що викликає цей струм, направлена також від вузла, то відповідна провідність записується на перетині q-го рядка і p-го стовпця зі знаком «+» (знак у виразу вузлового струму не змінюється). Тобто знак «+» записується при однаковому напрямі струму відносно q-го рядка і вузлової напруги відносно p-го стовпця; знак «$-$» записується при різних знаках вузлового струму і вузлової напруги.

На схемі 11.12, б вузловий струм αI_{E}, зв'язаний з вузлом 3 і направлений від вузла, перший доданок в (11.53), зв'язаний з вузлом 4, напруга якого також направлена від вузла 4. Отже напрями співпадають і у матрицю на перетин 3-го рядка і 4-го стовпця треба додати $\dfrac{\alpha}{R_2 + R_{\text{E}}}$. Відповідно напруга вузла 3 також направлена від вузла, тобто на перетині 3-го рядка і 3-го стовпця треба додати - $\dfrac{\alpha}{R_2 + R_{\text{E}}}$ - без зміни знаку в (11.53). Вузловий струм αI_{E} зв'язаний також з вузлом 2 і направлений до вузла, а вузлові напруги вузлів 3 і 4 направлені від вузлів. Отже на перетині 2-го рядка і 3-го стовпця треба змінити знак доданка з U_3 і записати «$+\dfrac{\alpha}{R_2 + R_{\text{E}}}$», а на перетині 2-го рядка і 4-го стовпця треба змінити знак доданка з U_4 і записати «$-\dfrac{\alpha}{R_2 + R_E}$». В результаті повна матриця вузлових провідностей для схеми рис. 11.12, б. записується так:

(11.54)

Приклад 11.1

Скласти рівняння стану кола, зображеного на рис. 11.13, а, в яке входять нелінійні елементи з наступними характеристиками:

$$i_1 = f(u_1), \quad u_1 = f(i_2), \quad u_C = f(q), \quad i_L = f(\psi).$$

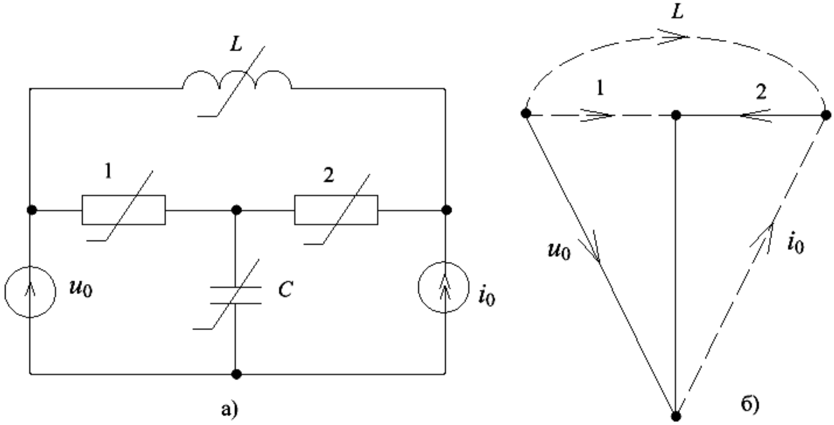


Рис. 11.13

В схемі діють джерело напруги u_0 та джерело струму i_0.

Розв'язок

1. Побудуємо напрямлений граф схеми у відповідності з довільно обраними напрямами струмів у вітках (рис. 11.13, б). Оберемо дерево графа (суцільні лінії – ребра - u_0, С на рис. 11.13, б). Решта віток (1, L, i_0 - хорди)

2. Складемо рівняння по закону Кірхгофа для струмів (ЗКС) для головних контурів графа:

перетин L, 1, C, i_0 : $i_L + i_1 - i_C + i_0 = 0$, перетин L, 1, u_0 : $i_{u0} + i_1 + i_L = 0$,

перетин L, 2, i_0 : $i_L - i_2 + i_0 = 0$.

3. Складемо рівняння по Закону Кірхгофа для напруг (ЗКН) для головних контурів графа:

контур L, 2, C, u_0 : $u_L + u_2 + u_C - u_0 = 0$

контур i_0 , 2, C: $u_{i0} + u_2 + u_C = 0$

контур 1, C, u_0 : $u_1 + u_C - u_0 = 0$

4. З першого рівняння по ЗКС, використовуючи характеристику $i_1 = f(u_1)$, одержимо

$$i_C = i_L + i_1 + i_0 = i_L + i_0 + f_1(u_1).$$

З третього рівняння по ЗКН

$$u_1 = u_C - u_0$$

Тоді

$$i_C = i_L + i_0 + f_1(u_0 - u_C)$$

Враховуючи, що

$$i_C = \frac{dq}{dt}, \quad u_C = f(q), \quad i_L = f(\psi),$$ одержуємо

$$\frac{dq}{dt} = f_1\left[u_0 - f(q)\right] + f(\psi) + i_0.$$

Це перше рівняння стану кола.

5. З першого рівняння по ЗКН, використовують характеристику $u_2 = f(i_2)$, одержимо

$$u_L = u_0 - u_2 - u_C = -u_C + u_0 - f_2(i_2)$$

З третього рівняння по ЗКС

$$i_2 = i_L + i_0$$

Тоді

$$u_L = -u_C - f_2(i_L + i_0) + u_0$$

Враховуючи, що

$$u_L = \frac{d\psi}{dt}, \quad i_L = f(\psi), \quad u_C = f(q)$$, одержуємо

$$\frac{d\psi}{dt} = -f(q) - f_2\left[f(\psi) + i_0\right] + u_0$$

Це друге рівняння стану кола.

6. Тобто одержали систему рівнянь стану кола

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = f_1\left[u_0 - f\left(q\right)\right] + f(\psi) + i_0, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -f_2\left[i_0 + f(\psi)\right] - f(q) + u_0 \end{cases}$$

Приклад 11.2

Визначити вхідну і передаточну характеристики кола по рис. 11.14, що складається з двох послідовно з'єднаних нелінійних резистивних елементів.

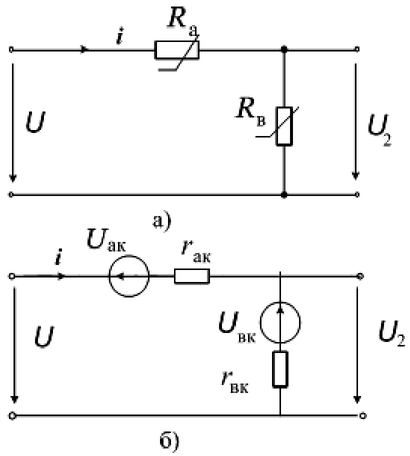


Рис.11.14

Кусково-лінійні вольтамперні характеристики елементів наведені на рис. 11.15.

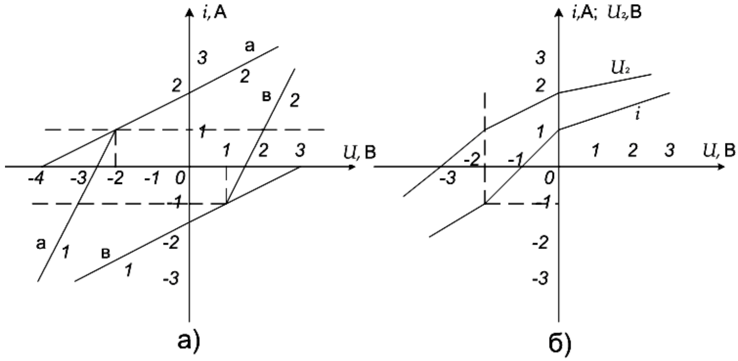


Рис. 11.15

Дані окремих лінійних ділянок: опори, межі ділянок визначаються точками зламу, а також напруги, що відповідають точкам перетину ліній з віссю «u», наведені в таблиці 11.1.

Табл. 11.1

Ділянка	*Межа* U,B	*Межа* i,A	$r_к$ Ом	$U_к$ В
a_1	$-\infty \div -2$	$-\infty \div 1$	0,5	-2,5
a_2	$-2 \div \infty$	$1 \div \infty$	2	-4
b_1	$-\infty \div 1$	$-\infty \div -1$	2	3
b_2	$1 \div \infty$	$-1 \div \infty$	0,5	1,5

Розв'язок

На рис. 11.14, а обидва елементи з'єднані послідовно, отже зручно використати еквівалентну схему на рис 11.14, б.

По ЗКН для контуру на рис. 11.14, б запишемо

$$u_{ak} + ir_{ak} + u_{bk} + ir_{bk} - u = 0$$

Звідки

$$i = \frac{u - (u_{ak} + u_{bk})}{r_{ak} + r_{bk}}$$

Вихідна напруга

$$u_2 = u_{bk} + ir_{bk} = \frac{r_{bk}}{r_{ak} + r_{bk}} u - \frac{r_{bk}}{r_{ak} + r_{bk}} (u_{ak} + u_{bk}) + u_{bk}$$

Для будь-якого сполучення лінійних ділянок обох елементів вхідний струм «i» вихідна напруга u_2 лінійно залежать від напруги «u» на вході. Отже вхідна $i(u)$ та передаточна $u_2(u)$ характеристики будуть складатися також з кусково-лінійних ділянок, число яких залежить від кількості можливих комбінацій обох елементів при зміні струму на вході в межах від $-\infty$ до $+\infty$. Визначимо ці ділянки при зростанні струму від $-\infty$ до $+\infty$.

З рис. 11.13, а видно, що при зростанні струму «i» від $-\infty$ до величини $i=-1$ процес іде по ділянкам 1 характеристик обох елементів до точки зламу при $i=-1$ характеристики елемента «b» (рис. 11.15, б). Далі процес буде визначатись сполученням ділянки 1 елемента «a» і ділянки 2 елемента «b» до точки $i=1$ на характеристиці елемента 1. На решті при $i>1$ процес буде визначатись ділянками 2 обох елементів. Отже для трьох сполучень лінійних ділянок окремих елементів одержуємо три лінійні ділянки вхідної і передаточної характеристики (рис. 11.15, б).

Знайдемо ці характеристики аналітично

1. Ділянка I характеристик обох елементів (a_1, b_1):

$$r_a = 0.5Ом, u_a = -2.5B, r_b = 2Ом, u_b = 3B$$

З виразу для струму «i» після підстановки

$$i = -0.2 + 0.4u$$

Для точки зламу характеристики елемента «b» межа ділянки I $i \le 1$. Звідси межі зміни вхідної напруги для цього сполучення

$$-\infty \le u \le -2$$

Вихідна напруги з виразу для u_2

$$u_2 = 2.6 + 0.8u$$

2. Ділянка II, яка включає ділянку 1 елемента «a» та ділянку 2 елемента «b» (a_1, b_2): $r_a = 0.5Ом, u_a = -2.5B, r_b = 0.5Ом, u_b = 1.5B$

З виразу для струму «i» після підстановки

$i = u + 1$

Для точки зламу характеристики елемента «a» (межа ділянки II) струм $-1 \le i \le 1$

Межі зміни вихідної напруги для цього сполучення

$-2 \le u \le 0$

Вихідна напруги з виразу для u_2

$u_2 = 2 + 0.5u$

3. Ділянка III, яка включає ділянку 2 елемента «a» та ділянку 2 елемента «b»

$(a_2, b_2): r_a = 2Ом, u_a = -4B, r_b = 0.5Ом, u_b = 1.5B$

З виразу для струму «i» після підстановки

$i = 1 + 0.4u$

Для точки зламу характеристики елемента «b» (межа ділянки III) струм $i \ge 1$ при $u \ge 0$.

Вихідна напруга з виразу для u_2

$u_2 = 2 + 0.2u$

Отже відповідь:

Ділянка I: $i \le 1$, $-\infty \le u \le -2$

вхідна характеристика $i = -0.2 + 0.4u$

передаточна характеристика $u_2 = 2.6 + 0.8u$

Ділянка II: $-1 \le i \le 1$, $-2 \le u \le 0$

вхідна характеристика $i = u + 1$

передаточна характеристика $u_2 = 2 + 0.5u$

Ділянка III: $i \ge 1$, $u \ge 0$

вхідна характеристика $i = 1 + 0.4u$

передаточна характеристика $u_2 = 2 + 0.2u$

Графіки характеристик наведені на рис. 11.15,б.

Приклад 11.3.

Побудувати фазову траєкторію для релаксаційних коливань (рис. 11.16, а)

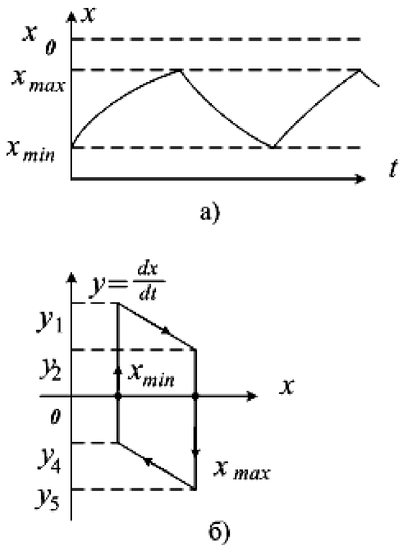


Рис. 11.16

Розв'язок.

Будемо вважати, що релаксаційне коливання складається з відрізків експоненціальних функцій: по зростаючій експоненті (ділянка від $x_{\min}$ до $x_{\max}$) та ділянка по експоненті, що зменшується (ділянка від $x_{\max}$ до $x_{\min}$).

Рівняння для зростаючої експоненти записується у вигляді

$$x = x_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Похідна

$$y = \frac{dx}{dt} = \alpha x_0 e^{-\alpha t}.$$

Виключаючи з обох рівнянь час «t», одержимо рівняння фазової траєкторії на першій ділянці

$$y_1 = \frac{dx}{dt} = \alpha(x_0 - x).$$

Рівняння для затухаючої експоненти записується у вигляді

$$x = x_0 e^{-\alpha t}.$$

Її похідна

$$y = \frac{dx}{dt} = -\alpha x_0 e^{-\alpha t}.$$

Після виключення параметра «t» одержимо рівняння фазової траєкторії на другій ділянці

$$y_2 = \alpha x.$$

Отже для обох ділянок фазові траєкторії являють собою прямі лінії з позитивним нахилом на першій ділянці і з негативним нахилом на другій ділянці (рис. 11.16, б).

Тут позначені величини $x_{\min}$ та $x_{\max}$. При зміні x від $x_{\min}$ до $x_{\max}$ значення «y» змінюється по закону $y_1 = 2(x_0 - x)$, тобто лінія проходить від точки y_1 до точки y_2, які відповідають похідним на початку та на кінці відрізку. При $x = x_{\max}$ напрям руху змінюється і похідна має розрив (знак похідної змінюється на зворотній). При зміні x від $x_{\max}$ до $x_{\min}$ значення y змінюється по закону $y_2 = \alpha x$, тобто лінія проходить від точки $y_3 = -y_1$ до точки $y_4 = -y_2$, які відповідають похідним на початку та на кінці відрізку. В результаті фазова траєкторія має вигляд замкненої кривої.

Приклад 11.4.

Вивести співвідношення для перерахування Y-параметрів однієї зі схем ввімкнення транзистора в параметри будь-якої іншої схеми.

Розв'язок

Для транзистора розрізняють три схеми ввімкнення. Зі спільним емітером (СЕ), зі спільною базою (СБ) та зі спільним колектором (СК). Відповідно до рівнянь (11.33) вкорочені матриці Y-параметрів для вказаних схем вмикання мають вигляд.

Якщо всі матриці Y рівні між собою, то їх елементи також рівні між собою. Тоді, наприклад, параметри схеми зі спільним емітером виражаються через параметри схеми зі спільною базою та через параметри зі спільним колектором.

Приклад 11.5.

Розраховуючи коефіцієнт підсилення по напрузі транзисторного каскаду, схема якого зображена на рис. 11.17, а. задані H-параметри транзистора в схемі зі спільним емітером: $H_{11E} = 2кОм, H_{12E} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}, H_{21E} = 30, H_{22E} = 32 \cdot 10^{-6} Ом$, а також опори резисторів 20, 10, 0.3, 5 кОм.

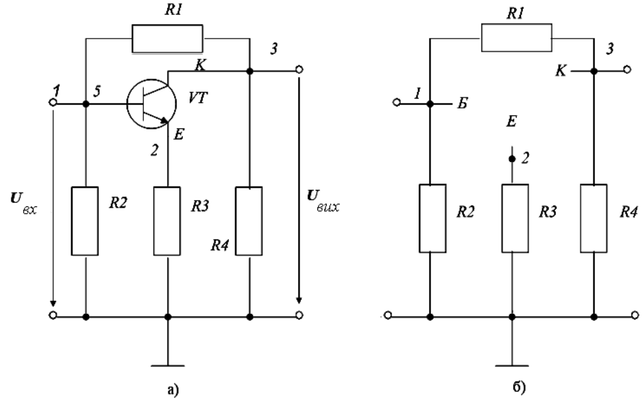


Рис. 11.17

11.8. Методичні вказівки

Задача розрахунку нелінійних електричних кіл набагато складніша, ніж лінійних. Звичайно розв'язок цієї задачі зводиться до складання і розв’язку диференційних рівнянь кола. Точний аналітичний розв'язок поставленої задачі можливий тільки в окремих найпростіших випадках, якщо характеристики нелінійних елементів точно визначені.

При розрахунку нелінійних кіл широко застосовують чисельні методи, графічний аналіз та еквівалентні схеми.

З точки зору розрахунку нелінійні кола можуть бути під впливом постійного чи змінного струму. Для кіл постійного струму зручними виявляються графічні, інтеграційні та аналітичні методи. Графічні методи не дозволяють одержати розв'язок у загальній формі. Інтеграційний метод достатньо трудомісткий, аналітичні методи – мало наочні, хоч і дають розв'язок у загальній формі. Частіше всього при розрахунку нелінійних кіл постійного струму виконують їх спрощення із застосуванням теореми компенсації і відомих еквівалентних перетворень.

Для уточнення результату розв'язку системи нелінійних функціональних рівнянь застосовують метод простої інтерації і метод Ньютона-Рафсона.

Усталені режими в нелінійних колах змінного струму досліджують методом комплексних амплітуд і векторні діаграми, якщо діючі ЕРС є гармонічними функціями.

Отже при всіх методах у тій чи іншій формі складаються нелінійні диференційні рівняння. Отже задача складання таких рівнянь вельми не простою і відповідальною.

Найбільш раціональним є складання системи рівнянь у нормальній формі, або рівняння стану. Змінні стану, які виступають як невідомі величини в цих рівняннях, це система найбільшого числа незалежних величин, необхідних і достатніх для повного визначення напруг і струмів всіх віток кола.

Система рівнянь стану (система Коші) складається з рівнянь першого порядку. Змінними стану в цих рівняннях можуть бути як струм в індуктивності та напруга на ємності, так і потокозчеплення індуктивності та заряд ємності.

Для зручності знайомства з системою рівнянь стану треба на простому прикладі розглянути складання рівнянь стану спочатку для лінійних кіл і другого порядку, а потім перейти до нелінійного кола першого порядку і далі – другого порядку.

Особливе місце в системі рівнянь стану нелінійних кіл займають лінійні кола з неавтономними джерелами струму чи напруги, наприклад, схеми з транзисторами. В таких системах нелінійний елемент – транзистор – замінюється лінійним трьохполюсником з неавтономним джерелом енергії, параметри якого входять як сталі коефіцієнти у рівняння стану.

Розв'язок системи нелінійних диференційних рівнянь являє собою вельми складну задачу. Методи розв'язку також діляться на якісні і наближені. При якісному методі будують траєкторії розв'язку рівнянь у просторі стану (метод фазового простору). Цей метод можливо застосовувати для кіл першого та другого порядку.

До наближених методі відносяться чисельний, кусково-чисельний та графічний. При цьому за допомогою комп'ютерів виконується чисельне інтегрування диференційних рівнянь будь-якої складності. Але чисельні методи застосовуються до систем, що мають єдиний розв'язок.

Прикладом чисельного методу є неявний алгоритм Ейлера. При цьому вісь часу розбивається на малі інтервали і послідовно обчислюються значення розв'язку на кожному інтервалі.

При кусково-лінійному методі характеристика нелінійного елемента замінюється кусково-лінійним представленням і далі для розрахунку на кожному інтервалі такого розбиття застосовується апарат лінійних кіл.

Для аналізу нелінійних кіл застосовуються також спеціальні методи. Одним з них є побудова лінійної схеми заміщення нелінійного чотирьохполюсника. Параметри схеми заміщення такі ж , як і в лінійній схемі:

Y-, Z-, H-, G-, A-, B - параметри. З цих параметрів можна одержати струми і загрузки для будь-яких віток чи вузлів чотирьохполюсника.

Такі ж параметри можна записати і для нелінійного багатополюсника.

Якщо в малосигнальному режимі нелінійний багатополюсник представлений лінійною схемою із залежними джерелами струму чи напруги, то система рівнянь такої схеми записується у вигляді матриці провідностей чи опорів лінійної частини схеми. Далі в цю матрицю вписуються параметри виділеного нелінійного елемента і його еквівалентної схеми. Розв'язок системи рівнянь одержують з побудованих матриць відомими методами.

Задачі

11.1 Побудувати фазову траєкторію лінійно зростаючого коливання, що визначається виразом. Зобразити часову діаграму і фазове зображення.

$$x=vt$$

11.2 Побудувати фазове зображення гармонічного коливання. Зобразити часову діаграму і фазовий портрет $x = x_0 \sin \omega t$.

11.3 Дано *Y*-параметри транзистора. Обчислити його *H*-параметри.

11.4 Скласти матрицю провідності вибіркового підсилювача (мал.11.18).

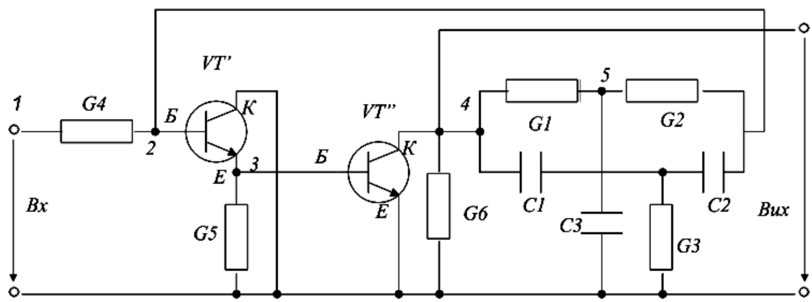


Рис. 11.18

Примітка: використати матрицю *Y*-параметрів транзистора по таблиці 11.2 у вигляді

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} б & к \end{array} \\ Y = \begin{array}{c} б \\ к \end{array} & \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} \end{array}$$

Питання для самоперевірки.

1. Які методи застосовуються для розрахунку нелінійних кіл постійного струму?
2. Які теореми і методи еквівалентних перетворень застосовують при спрощенні схем у нелінійних колах постійного струму?

3. Поясніть метод простої ітерації при розрахунку нелінійних кіл постійного струму?
4. Поясніть суть метода Ньютона-Рафсона при розрахунку нелінійних кіл постійного струму?
5. Які методи застосовуються для розрахунку нелінійних кіл змінного струму?
6. Які величини можуть бути змінними стану в системі диференційних рівнянь нелінійних кіл змінного струму?
7. Що таке рівняння стану? Який порядок цих рівнянь?
8. Який алгоритм складання рівнянь стану?
9. Які особливості складання рівнянь стану для нелінійних кіл з неавтономними джерелами струму?
10. Які методи розв'язку рівнянь стану вам відомі?
11. У чому полягає зміст чисельного алгоритму Ейлера при розв'язку рівнянь стану?
12. У чому полягає зміст кусково-лінійного методу при розв'язку рівнянь стану нелінійних кіл?
13. Які можливості аналізу нелінійних кіл дає метод фазових траєкторій?
14. Які системи рівнянь складаються при заміщенні нелінійних кіл чотирьохполюсником?
15. Як складається матриця провідностей нелінійної схеми з багатополюсником?
16. Які особливості складання матриці вузлових провідностей для нелінійних схем з залежними джерелами?

Рекомендована література

1. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника: в 2 т.: перевод с нем. –т.1- М.: Доджи – XXI, 2008 – 832с.: ил.

2. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника: в 2 т.: перевод с нем. –т.2- М.: Доджи – XX, 2008 – 912с.: ил.

3. В.И. Карлащук «Электронная лаборатория на IBM PC Том 2. Моделирование телекоммуникационных и цифровых систем.

6-е изд. перер.и дополн..-М. СОЛОН-ПРЕСС, 2006.-640с.: ил. (Серия «Системы проектирования»).

4. Теоретические основы электротехники: в 3-х томах. Учебник для вузов. Том 1–4 изд./К.С.Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровин, В.Л.Чечурин.- СПб.:Питер, 2006, - 463с.:ил.

5. Теоретические основы электротехники: в 3-х томах. Учебник для вузов. Том 2–4 изд./К.С.Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровин, В.Л.Чечурин.- СПб.:Питер, 2006, - 576с.:ил.

6. Теоретические основы электротехники: в 3-х томах. Учебник для вузов. Том 3–4 изд./К.С.Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровин, В.Л.Чечурин.- СПб.:Питер, 2006, - 377с.:ил.

7. В.И. Карлащук «Электронная лаборатория на IBM PC Том 2. Моделирование елементов телекоммуникационных и цифровых систем. 6-е изд. перер.и дополн..-М. СОЛОН-ПРЕСС, 2006.-640с.: ил.

8. В.И. Карлащук «Электронная лаборатория на IBM PC Том 1. Моделирование елементов аналоговых систем. 6-е изд. перер.и дополн..-М. СОЛОН-ПРЕСС, 2006.-672с.: ил.

9. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов/С.И.Баскаков.- М.: Высшая школа,2005.-462с.:ил.

10. Новиков Ю.М. электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, методы анализа: Учебное пособие.- СПб.:Питер, 2005.-384с.:ил.

11. Уилкинсон,Барри. Основы проектирования цифрових схем.- Пер. С англ..- М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.- 320с.: ил.

12. Бойко В.И. и др.. Схемотехника электронных систем. Аналоговые и импульсные устройства./Бойко В.И., Гуржий А.Н., Жуйков В.Я., Зорн А.А., Спивак В.М. – СПб.:БХВ – Петербург, 2004.- 512 с.: ил.

13. Бойко В.И. и др.. Схемотехника электронных систем. Цифровые устройства./Бойко В.И., Гуржий А.Н., Жуйков В.Я., Зорн А.А., Спивак В.М.,Багрий В.В. – СПб.:БХВ – Петербург, 2004.- 512с.: ил.

14. Фриск В.В.Основы теории цепей. Сборник задач с применением персонального комп'ютера.-М.:Солон-Пресс, 2003, -192с.:ил. –(Серия «Библиотека студента»).

15. Кардашев Г.А.Цифровая электроника на персональном компьютере. Electronics Workbench с Micro- Cap.- М.:Горячая линия.- Телеком. 2003.-311с.: ил.

16. П'яних Б.Є. Основи теорії кіл. Перехідні процеси в електричних колах. Чотирьохполюсники. Фільтри: Навчальний посібник.-К.: НАУ, 2003.-204с.

17. Гаврилов Л.П. Нелинейные цепи в программах схемотехнического моделирования/Л.П.Гаврилов.-М.: Солон-Пресс, 2002,-308с.-(Серия «Системы проектирования»).

18. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М. электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: Практическое пособие.- СПб. :Корона и принт, 2002.- 336с.: ил.

19. Баскаков С.И. Лекции по теории цепей.- М.: Издат.МЭИ, 1991.- 224с.

20. Данилов Л.В. и др. Теория нелинейных электрических цепей/Л.В.Данилов, П. Н. Матханов, Е.С. Филиппов.- Л.: Энергоатомиздат. Ленинградское отделение, 1990.- 265с.: ил.

21. Демирчан К.С. Бутырин П. А. Моделирование и расчет электрических цепей: Учебное пособие для электр. и электроэнергет. специальностей вузов.- М.: Высшая школа.- 1988.- 335с.: ил.

22. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов по специальности «Радиотехника».2-е издание перер. И доп.- М.: Высшая школа,- 1988.- 448с.: ил.

23. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач: Учебное пособие для радиотехн. Специальностей вузов.- М.: Высшая школа,- 1987.-207с.: ил.

24. Расчет электронных схем. Примеры и задачи: Учебное пособие для вузов по специальн. электрон. техники /Г.И. Изъюрова, Г.В. Королев, В.А. Терехов и др. – М.: Высшая школа, 1987.- 335с.: ил.

25. Бирюков В. Н., Попов В.П., Семенцев В.И. Сборник задач по теории цепей: Учебное пособие для студентов вузов спец. «Радиотехника»/ Под ред. В.П. Попова.- М.: Высшая школа, 1985.- 239с.: ил.

26. Сборник задач и упражнений по курсу «Радиоприемные устройства»: Учебное пособие для вузов/ Ю.Н. Антехов-Антипов, В.П.Васильев, И.В.Комаров, В.Д. Разевич; под ред. В.И. Сифорова.- М.: Радио и связь, 1984.- 224с.: ил.

27. Андреев В.С. Теория нелинейных электрических цепей: Учебное пособие для вузов.- М.: Радио и связь, 1982.- 280с.: ил.

28. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа,-1977.-272с.,ил.

29. Филиппов Е.С. Нелинейная электротехника. Пер. с нем./ Под ред. А.Б.Тимофеева. Изд.2-е перераб. и доп.- М.:»Энергия»,-1976,-496с., ил.

30. Теория нелинейных электрических цепей : Учебник для вузов для студентов связи/ А.М.Заездный, В.Ф. Кушнир, Б.А. Ферсман.-М.: «Связь».-1968.- 400с., ил.